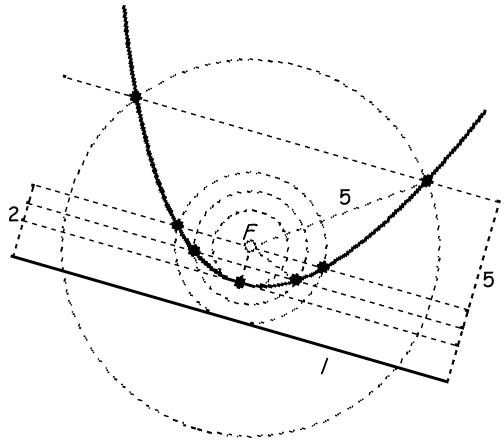


1a Zie de figuur hiernaast.
De punten P waarvoor $d(P, F) = 1$
liggen op de cirkel met middelpunt F en $r = 1$.
De punten P waarvoor $d(P, l) = 1$
liggen op de lijnen die op afstand 1 van l lopen.
Er is één punt P dat voldoet aan $d(P, F) = d(P, l) = 1$.

1b Er zijn twee punten P die voldoen aan $d(P, F) = d(P, l) = 1{,}5$.
Er zijn twee punten P die voldoen aan $d(P, F) = d(P, l) = 2$.
Er zijn twee punten P die voldoen aan $d(P, F) = d(P, l) = 5$.

1c Zie de kromme in de figuur hiernaast. (het is een parabool)

2a $P(x, y)$ op de parabool geeft $d(P, F) = d(P, l)$
$\sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2} = y + \frac{1}{2}p$ (kwadrateren)
$x^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2 = (y + \frac{1}{2}p)^2$
$x^2 \cancel{+ y^2} - py \cancel{+ \frac{1}{4}p^2} = \cancel{y^2} + py \cancel{+ \frac{1}{4}p^2}$
$x^2 = 2py$.

2b Een parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ (links van de oorsprong omdat $p < 0$) en richtlijn l: $x = -\frac{1}{2}p$ (rechts van de oorsprong).
Het is dus een parabool met top $O(0, 0)$ en de opening naar links (omdat $p < 0$).

3a $\frac{1}{2}p = 6 \Rightarrow p = 12$. De parabool (met opening naar rechts $\Rightarrow y^2 = 2px$) heeft als vergelijking: $y^2 = 24x$.

3b $\frac{1}{2}p = -8 \Rightarrow p = -16$. De parabool (met opening naar links $\Rightarrow y^2 = 2px$) heeft als vergelijking: $y^2 = -32x$.

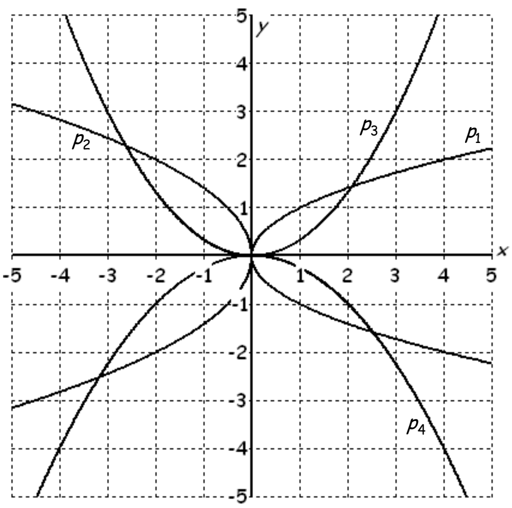
3c $\frac{1}{2}p = -4 \Rightarrow p = -8$. De parabool (met opening naar beneden $\Rightarrow x^2 = 2py$) heeft als vergelijking: $x^2 = -16y$.

3d $\frac{1}{2}p = 3 \Rightarrow p = 6$. De parabool (met opening naar boven $\Rightarrow x^2 = 2py$) heeft als vergelijking: $x^2 = 12y$.

4a $y^2 = (2p\lambda)^2 = 4p^2\lambda^2 = 2p \cdot 2p\lambda^2 = 2px$.

4b $y^2 = (6\lambda)^2 = 36\lambda^2 = 6 \cdot 6\lambda^2 = 6x$. Dus $y^2 = 6x$.

4c I: $x = -\lambda^2 \wedge y = \lambda$. II: $x = \lambda \wedge y = \frac{1}{4}\lambda^2$. III: $x = \lambda \wedge y = 2\lambda^2 + 5$.



5a Zie de parabolen in de figuur hiernaast.

5b Bij de translatie 5 naar rechts moet x vervangen worden door $x - 5$.
Net zo moet je bij de translatie 6 omhoog y vervangen door $y - 6$.
Dus p_1: $y^2 = x \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (y - 6)^2 = x - 5$.

5c p_2: $y^2 = -2x \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (y - 6)^2 = -2(x - 5)$.
p_3: $x^2 = 3y \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (x - 5)^2 = 3(y - 6)$.
p_4: $x^2 = -4y \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (x - 5)^2 = -4(y - 6)$.

5d $y^2 = x$ heeft top $(0, 0)$, brandpunt $(\frac{1}{4}, 0)$ en richtlijn $x = -\frac{1}{4}$.
$(0, 0) \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (0 + 5, 0 + 6) = (5, 6)$.
$(\frac{1}{4}, 0) \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} (\frac{1}{4} + 5, 0 + 6) = (5\frac{1}{4}, 6)$.
$x = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{Tr. }(5, 6)} x = -\frac{1}{4} + 5 = 4\frac{3}{4}$.
Van de parabool $(y - 6)^2 = x - 5$ is de top $(5, 6)$, het brandpunt $(5\frac{1}{4}, 6)$ en de richtlijn $x = 4\frac{3}{4}$.

5e Van p_2: $y^2 = -2x$ is de top $(0, 0)$, het brandpunt $(-\frac{1}{2}, 0)$ en de richtlijn $x = \frac{1}{2}$, dus
van $(y - 6)^2 = -2(x - 5)$ is de top $(5, 6)$, het brandpunt $(4\frac{1}{2}, 6)$ en de richtlijn $x = 5\frac{1}{2}$.
Van p_3: $x^2 = 3y$ is de top $(0, 0)$, het brandpunt $(0, \frac{3}{4})$ en de richtlijn $y = -\frac{3}{4}$, dus
van $(x - 5)^2 = 3(y - 6)$ is de top $(5, 6)$, het brandpunt $(5, 6\frac{3}{4})$ en de richtlijn $y = 5\frac{1}{4}$.
Van p_4: $x^2 = -4y$ is de top $(0, 0)$, het brandpunt $(0, -1)$ en de richtlijn $y = 1$, dus
van $(x - 5)^2 = -4(y - 6)$ is de top $(5, 6)$, het brandpunt $(5, 5)$ en de richtlijn $y = 7$.

6a
$y^2 + 10y = 4x - 1$
$(y+5)^2 - 25 = 4x - 1$
$(y+5)^2 = 4x + 24$
$(y+5)^2 = 4(x+6)$. (hiernaast verder)

$y^2 = 4x \xrightarrow{\text{Tr. } (-6,-5)} (y+5)^2 = 4(x+6).$

$y^2 = 4x$	$(y+5)^2 = 4(x+6)$
de top $(0,0)$	de top $(-6,-5)$
het brandpunt $(1,0)$	het brandpunt $(-5,-5)$
de richtlijn $x = -1$	de richtlijn $x = -7$
de as $y = 0$ (de x-as)	de as $y = -5$

6b
$x^2 - 6x = 2y - 3$
$(x-3)^2 - 9 = 2y - 3$
$(x-3)^2 = 2y + 6$
$(x-3)^2 = 2(y+3)$. (hiernaast verder)

$x^2 = 2y \xrightarrow{\text{Tr. } (3,-3)} (x-3)^2 = 2(y+3)$.

$x^2 = 2y$	$(x-3)^2 = 2(y+3)$
de top $(0,0)$	de top $(3,-3)$
het brandpunt $(0, \frac{1}{2})$	het brandpunt $(3, -2\frac{1}{2})$
de richtlijn $y = -\frac{1}{2}$	de richtlijn $y = -3\frac{1}{2}$
de as $x = 0$ (de y-as)	de as $x = 3$

6c
$y^2 + 5x + 4y = 1$
$y^2 + 4y = -5x + 1$
$(y+2)^2 - 4 = -5x + 1$
$(y+2)^2 = -5x + 5$
$(y+2)^2 = -5(x-1)$. (hiernaast verder)

$y^2 = -5x \xrightarrow{\text{Tr. } (1,-2)} (y+2)^2 = -5(x-1)$.

$y^2 = -5x$	$(y+2)^2 = -5(x-1)$
de top $(0,0)$	de top $(1,-2)$
het brandpunt $(-\frac{5}{4}, 0)$	het brandpunt $(-\frac{1}{4}, -2)$
de richtlijn $x = \frac{5}{4}$	de richtlijn $x = \frac{9}{4}$
de as $y = 0$ (de x-as)	de as $y = -2$

6d
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$
$\frac{1}{4}x^2 - 3x = -y - 6$
$x^2 - 12x = -4y - 24$
$(x-6)^2 - 36 = -4y - 24$
$(x-6)^2 = -4y + 12$
$(x-6)^2 = -4(y-3)$. (hiernaast verder)

$x^2 = -4y \xrightarrow{\text{Tr. } (6,3)} (x-6)^2 = -4(y-3).$

$x^2 = -4y$	$(x-6)^2 = -4(y-3)$
de top $(0,0)$	de top $(6,3)$
het brandpunt $(0,-1)$	het brandpunt $(6,2)$
de richtlijn $y = 1$	de richtlijn $y = 4$
de as $x = 0$ (de y-as)	de as $x = 6$

7a
$y^2 = 2px \xrightarrow{\text{Tr. } (a,b)} (y-b)^2 = 2p(x-a)$.

$y^2 = 2px$	$(y-b)^2 = 2p(x-a)$
het brandpunt $(\frac{1}{2}p, 0)$	het brandpunt $(\frac{1}{2}p+a, b)$
de richtlijn $x = -\frac{1}{2}p$	de richtlijn $x = -\frac{1}{2}p+a$

7b
$y = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + bx = y - c$
$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{1}{a}y - \frac{c}{a}$
$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}y - \frac{c}{a}$
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2}{4a} - c)$
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2-4ac}{4a})$, dus $2p = \frac{1}{a} \Rightarrow p = \frac{1}{2a}$. (hierboven gaat het verder)

$x^2 = \frac{1}{a}y \xrightarrow{\text{Tr. } (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})} (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2-4ac}{4a}).$

het brandpunt $(0, \frac{1}{4a})$
de richtlijn $y = -\frac{1}{4a}$

het brandpunt $(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}) = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2+4ac}{4a})$
richtlijn $y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{-1-b^2+4ac}{4a}$

8a
$y^2 + ay = ax + a^2$
$(y + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = ax + a^2$
$(y + \frac{1}{2}a)^2 = ax + \frac{5}{4}a^2$
$(y + \frac{1}{2}a)^2 = a(x + \frac{5}{4}a)$, dus $2p = a \Rightarrow p = \frac{1}{2}a$. (hierboven gaat het verder)

$y^2 = ax \xrightarrow{\text{Tr. } (-\frac{5}{4}a, -\frac{1}{2}a)} (y + \frac{1}{2}a)^2 = a(x + \frac{5}{4}a).$

$y^2 = ax$	$(y + \frac{1}{2}a)^2 = a(x + \frac{5}{4}a)$
de top $(0, 0)$	de top $(-\frac{5}{4}a, -\frac{1}{2}a)$
het brandpunt $(\frac{1}{4}a, 0)$	het brandpunt $(\frac{1}{4}a - \frac{5}{4}a, -\frac{1}{2}a) = (-a, -\frac{1}{2}a)$

8b Het brandpunt $(-a, -\frac{1}{2}a)$ (berekend in 8a hierboven) ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ als
$(-a)^2 + (-\frac{1}{2}a)^2 = 10 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 10 \Rightarrow \frac{5}{4}a^2 = 10 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Dus $a = -2\sqrt{2} \ \vee \ a = 2\sqrt{2}$.

9a $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow (2x)^2 = 6x \Rightarrow 4x^2 = 6x \Rightarrow 4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(4x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}$. Dus $(0, 0)$ en $(\frac{3}{2}, 3)$.

9b $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow (2x-1)^2 = 6x \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 6x \Rightarrow 4x^2 - 10x + 1 = 0$ met $D = (-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 100 - 16 > 0$.
Omdat $D > 0$ zijn er twee oplossingen voor x. Dus de lijn $y = 2x - 1$ snijdt de parabool $y^2 = 6x$ in twee punten.

9c $(2x + \frac{3}{4})^2 = 6x \Rightarrow 4x^2 + 3x + \frac{9}{16} = 6x \Rightarrow 4x^2 - 3x + \frac{9}{16} = 0$ met $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{16} = 9 - 9 = 0$.
Omdat $D = 0$ is er één oplossing voor x. Dus de lijn $y = 2x + \frac{3}{4}$ raakt de parabool $y^2 = 6x$.

10a $x=\frac{3}{8}$ en $y=\frac{3}{2}$ invullen geeft $(\frac{3}{2})^2=6\cdot\frac{3}{8}$ ofwel $\frac{9}{4}=\frac{18}{8}$ (dit klopt!!!). Dus $P(\frac{3}{8},\ \frac{3}{2})$ ligt op de parabool.

10b $P(\frac{3}{8},\ \frac{3}{2})$ ligt op de helft die gegeven is door $y=\sqrt{6x}$ omdat $y_P=\frac{3}{2}>0$.

10c $y=\sqrt{6x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{6x}}\cdot 6=\frac{6}{2\sqrt{6x}}=\frac{3}{\sqrt{6x}}=\frac{3}{y}$. De raaklijn in $P(\frac{3}{8},\ \frac{3}{2})$ is $y=ax+b$ met $a=\frac{3}{y}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{3}=2$.
$y=2x+b$ door $P(\frac{3}{8},\ \frac{3}{2})\Rightarrow\frac{3}{2}=2\cdot\frac{3}{8}+b\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}=b$. Dus de lijn $y=2x+\frac{3}{4}$ raakt de parabool $y^2=6x$ in P.

voorbeeld c op bladzijde 98
c de lijn n die de parabool loodrecht snijdt in het punt $B(-8\frac{1}{10},\ -9)$. $\{(-8\frac{1}{5},-9)$ is niet goed$\}$

```
-10*-8.2        82
(-9)²           81
-10*-8.1        81
```

Uitwerking
c raaklijn m: $-9y=-5x-5\cdot -8\frac{1}{10}$ (de methode van halfsubstitutie) ofwel $5x-9y=40\frac{1}{2}$.
$\left.\begin{array}{l}\text{normaal } n\text{: } 9x+5y=c\\ \text{door } B(-8\frac{1}{10},\ -9)\end{array}\right\}\Rightarrow c=9\cdot -8\frac{1}{10}+5\cdot -9=-72\frac{9}{10}-45=-117\frac{9}{10}$. Dus n: $9x+5y=-117\frac{9}{10}$.

11a Omdat $y^2=2px$ een parabool is voor elke waarde van p met uitzondering van $p=0$ mogen in de vergelijking $-8abp=-4p^2$ linker- en rechterlid gedeeld worden door $-4p(\neq 0)$ en dus mag de stap $-8abp=-4p^2\Rightarrow 2ab=p$.

11b Als $a=0$ zou de raaklijn zijn: $y=0x+b$ ofwel $y=b$ (dus een horizontale raaklijn).
De raaklijn zou dan evenwijdig lopen met de as van de parabool en dat kan niet.

12a In het geval $y_A<0$ ligt $A(x_A,\ y_A)$ op de halve parabool $y=-\sqrt{2px}$.
$y=-\sqrt{2px}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{2px}}\cdot 2p=-\frac{2p}{2\sqrt{2px}}=-\frac{p}{\sqrt{2px}}=-\frac{p}{-y}=\frac{p}{y}$ (hetzelfde resultaat als in de onderste regel op blz. 97).
Op bladzijde 98 verandert er niets, dus: de raaklijn in $A(x_A,\ y_A)$ aan de parabool $y^2=2px$ is $y_Ay=px+px_A$.

12b $y_A=0$ invullen in $y^2=2px$ $(p\neq 0)$ geeft $x_A=0\Rightarrow A(0,\ 0)$.
De raaklijn in $A(0,\ 0)$ aan de parabool $y^2=2px$ is $0\cdot y=px+p\cdot 0\Rightarrow px=0$ $(p\neq 0)\Rightarrow x=0$ (de y-as).
Klopt, want van de parabool $y^2=2px$ is de top $(0,\ 0)$ en de as $y=0$ (de x-as) $\Rightarrow x=0$ is de raaklijn in $(0,\ 0)$.

Raaklijn met rc $=a$ aan parabool $y^2=2px$ is k: $y=ax+\frac{p}{2a}$.

Raaklijn in $A(x_A,\ y_A)$ aan parabool $y^2=2px$ (ofwel $y\cdot y=px+px$) is k: $y_Ay=px+px_A$. (halfsubstitutie)

13a $a=\frac{1}{4}$ en $p=4$ geeft k: $y=\frac{1}{4}x+\frac{4}{2\cdot\frac{1}{4}}$. Dus k: $y=\frac{1}{4}x+8$.

13b $A(4\frac{1}{2},\ -6)$ geeft l: $-6y=4x+4\cdot 4\frac{1}{2}$.
Dus $-6y=4x+18$ ofwel $2x+3y=-9$.

13c $B(2,\ 4)$ geeft raaklijn: $4y=4x+4\cdot 2$ ofwel $x-y=-2$.
normaal n: $x+y=c$ door $B(2,\ 4)\Rightarrow 2+4=c$. Dus n: $x+y=6$.

14a Raaklijn in $A(x_A,y_A)$ is k: $y_Ay=px+px_A$. Neem aan dat $x_A\neq 0$, want anders is $A=B=C=O(0,\ 0)$.
$B(x_B,0)$ op $k\Rightarrow y_A\cdot 0=px_B+px_A\Rightarrow px_B=-px_A$ $(p\neq 0)\Rightarrow x_B=-x_A$.
k: $y_Ay=px+px_A$ ofwel k: $px-y_Ay=-px_A\Rightarrow$ normaal l: $y_Ax+py=c$ door $A(x_A,y_A)$, dus $c=y_Ax_A+py_A$.
$C(x_C,0)$ op l: $y_Ax+py=y_Ax_A+py_A\Rightarrow y_Ax_C+p\cdot 0=y_Ax_A+py_A\Rightarrow y_Ax_C=y_Ax_A+py_A$ $(y_A\neq 0)\Rightarrow x_C=x_A+p$.

14b $BC=|x_C-x_B|=|x_A+p--x_A|=|2x_A+p|$.

15 Van $y^2=2px$ $(p\neq 0)$ is het brandpunt $F(\frac{1}{2}p,\ 0)$ en de richtlijn l: $x=-\frac{1}{2}p$.
B is de loodrechte projectie van $A(x_A,\ y_A)$ op l: $x=-\frac{1}{2}p\Rightarrow B(-\frac{1}{2}p,\ y_A)$.
Stel m is de middelloodlijn van BF, dan geldt $\text{rc}_{BF}\cdot\text{rc}_m=-1$ met $\text{rc}_{BF}=\frac{y_F-y_B}{x_F-x_B}=\frac{0-y_A}{\frac{1}{2}p--\frac{1}{2}p}=-\frac{y_A}{p}\Rightarrow\text{rc}_m=\frac{p}{y_A}$.
m: $y=\frac{p}{y_A}x+b$ door het midden $(0,\ \frac{1}{2}y_A)$ van $BF\Rightarrow b=\frac{1}{2}y_A$, dus
m: $y=\frac{p}{y_A}x+\frac{1}{2}y_A\Rightarrow m$: $y_A\cdot y=px+\frac{1}{2}y_A\cdot y_A\Rightarrow m$: $y_A\cdot y=px+\frac{1}{2}\cdot 2px_A\Rightarrow m$: $y_A\cdot y=px+px_A$
en dit is nu precies de vergelijking van de lijn k die de parabool $y^2=2px$ raakt in $A(x_A,\ y_A)$.
Dus de raaklijn k in A valt samen met de middelloodlijn van BF. (B is de loodrechte projectie van A op richtlijn l)

16a Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M,\ y_M)$ en straal r is $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$.
Voor raakpunten op de x-as $(y=0)$ geldt $x=x_M$ en $y=0$. Dit geeft $(x_M-x_M)^2+(0-y_M)^2=r^2$ ofwel ${y_M}^2=r^2$.
De cirkel gaat door $(0,\ 2)$. Dit geeft $(0-x_M)^2+(2-y_M)^2=r^2$ ofwel ${x_M}^2+(2-y_M)^2=r^2$.

$r^2 = y_M{}^2$ invullen in $r^2 = x_M{}^2 + (2-y_M)^2$ (dus r elimineren) geeft:
$y_M{}^2 = x_M{}^2 + (2-y_M)^2 \Rightarrow \cancel{y_M{}^2} = x_M{}^2 + 4 - 4y_M + \cancel{y_M{}^2} \Rightarrow 4y_M = x_M{}^2 + 4 \Rightarrow y_M = \frac{1}{4}x_M{}^2 + 1.$
De middelpunten van alle cirkels die de x-as raken en door het punt (0,2) gaan. liggen op de parabool $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

16b Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M,\ y_M)$ en straal r is $(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = r^2$.
Voor raakpunten op de x-as ($y=0$) geldt $x = x_M$ en $y = 0$. Dit geeft $(x_M - x_M)^2 + (0-y_M)^2 = r^2$ ofwel $y_M{}^2 = r^2$.
De cirkel gaat door (3, 4). Dit geeft $(3-x_M)^2 + (4-y_M)^2 = r^2$.
$r^2 = y_M{}^2$ invullen in $r^2 = (3-x_M)^2 + (4-y_M)^2$ geeft:
$y_M{}^2 = (3-x_M)^2 + (4-y_M)^2 \Rightarrow \cancel{y_M{}^2} = 9 - 6x_M + x_M{}^2 + 16 - 8y_M + \cancel{y_M{}^2} \Rightarrow 8y_M = x_M{}^2 - 6x_M + 25 \Rightarrow$
$8y_M = (x_M-3)^2 - 9 + 25 \Rightarrow 8y_M - 16 = (x_M-3)^2 \Rightarrow (x_M-3)^2 = 8(y_M-2).$
Middelpunten van alle cirkels die de x-as raken en door het punt (3,4) gaan op de parabool $(x_M-3)^2 = 8(y_M-2)$.

17a Parabool $y^2 = 2x$ ($y \cdot y = x + x$) en raakpunt $A(8,\ 4)$ geeft (met halfsubstitutie) raaklijn l: $4y = x + 8$ ofwel $x - 4y = -8$.
Parabool $y^2 = 2x$ en raakpunt $B(2,\ -2)$ geeft (met halfsubstitutie) raaklijn k: $-2y = x + 2$ ofwel $x + 2y = -2$.

17b $\begin{cases} x - 4y = -8 & ❶ \\ \underline{x + 2y = -2}\ _{-} & ❷ \end{cases}$
$-6y = -6 \Rightarrow y = 1$ in ❷ $\Rightarrow x + 2 = -2 \Rightarrow x = -4.$ Dus $P(-4,\ 1)$.

17c $\text{rc}_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{2-8} = \frac{-6}{-6} = 1.$ Dus AB: $y = 1x + b$ door $A(8,\ 4) \Rightarrow 4 = 8 + b \Rightarrow b = -4.$ Dit geeft AB: $y = x - 4$.

17d Parabool $y^2 = 2x$ ($y \cdot y = x + x$) en punt $P(-4,\ 1)$ geeft (met halfsubstitutie) poollijn AB: $1y = x - 4$ ofwel $y = x + 4$.

18a $\left.\begin{array}{l} k \text{ raakt de parabool } y^2 = 2px \text{ in } A(x_A, y_A) \Rightarrow k\text{: } y_A \cdot y = px + p \cdot x_A \\ k \text{ door } P(x_P, y_P) \Rightarrow k\text{: } y_A \cdot y_P = p \cdot x_P + p \cdot x_A \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ ligt op de lijn } y \cdot y_P = p \cdot x_P + px$
$\left.\begin{array}{l} l \text{ raakt de parabool } y^2 = 2px \text{ in } B(x_B, y_B) \Rightarrow k\text{: } y_B \cdot y = px + p \cdot x_B \\ l \text{ door } P(x_P, y_P) \Rightarrow k\text{: } y_B \cdot y_P = p \cdot x_P + p \cdot x_B \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ ligt op de lijn } y \cdot y_P = p \cdot x_P + px$
A alsook B voldoen aan $y_P y = px + px_P \Rightarrow AB$: $y_P \cdot y = px + p \cdot x_P$ is een vergelijking van de poollijn van $P(x_P,\ y_P)$.

18b De poollijn van $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van $y^2 = 2px$ is $y_Q \cdot y = px + p \cdot x_Q$. (zie 18a)
De translatie (x_T, y_T) geeft:
de poollijn van $Q'(x_Q + x_T, y_Q + y_T)$ ten opzichte van $(y - y_T)^2 = 2p(x - x_T)$ is $y_Q \cdot (y - y_T) = p(x - x_T) + p \cdot x_Q$.
$Q'(x_Q + x_T, y_Q + y_T) = P(x_P, y_P) \Rightarrow x_Q + x_T = x_P$ en $y_Q + y_T = y_P$, dus $x_Q = x_P - x_T$ en $y_Q = y_P - y_T$.
Dus de poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van $(y - y_T)^2 = 2p(x - x_T)$
is de lijn $(y_P - y_T) \cdot (y - y_T) = p(x - x_T) + p \cdot (x_P - x_T)$. (dit is ook halfsubstitutie)

19a De poollijn van $A(-4,\ -\frac{1}{2})$ ten opzichte van $y^2 = \frac{1}{2}x$ ($y \cdot y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x$) is $-\frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot -4$ ofwel $x + 2y - 4 = 0$.
$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 & ❶ \\ y^2 = \frac{1}{2}x & ❷ \end{cases}$
❶ in ❷ $\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}(-2y + 4)$
$y^2 = -y + 2$
$y^2 + y - 2 = 0$
$(y + 2)(y - 1) = 0$
$y = -2 \ \vee\ y = 1$ (hiernaast verder)

$y = -2$ in ❶ $\Rightarrow x = 8$ geeft raakpunt $(8,\ -2)$
en raaklijn $-2y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot 8$ ofwel $x + 8y + 8 = 0$,
$y = 1$ in ❶ $\Rightarrow x = 2$ geeft raakpunt $(2, 1)$
en raaklijn $1y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot 2$ ofwel $x - 4y + 2 = 0$.

19b De poollijn van $B(1\frac{1}{2}, 1)$ ten opzichte van $y^2 = -2x$ ($y \cdot y = -x - x$) is $1y = -x - 1\frac{1}{2}$ ofwel $y = -x - 1\frac{1}{2}$.
$\begin{cases} y = -x - 1\frac{1}{2} & ❶ \\ y^2 = -2x & ❷ \end{cases}$
❶ in ❷ $\Rightarrow (-x - 1\frac{1}{2})^2 = -2x$
$x^2 + 3x + 2\frac{1}{4} = -2x$
$x^2 + 5x + 2\frac{1}{4} = 0$
$(x + 4\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0$
$x = -4\frac{1}{2} \ \vee\ x = -\frac{1}{2}$ (hiernaast verder)

$x = -4\frac{1}{2}$ in ❶ $\Rightarrow y = 3$ geeft raakpunt $(-4\frac{1}{2}, 3)$
en raaklijn $3y = -x + 4\frac{1}{2}$ ofwel $x + 3y = 4\frac{1}{2}$,
$x = -\frac{1}{2}$ in ❶ $\Rightarrow y = -1$ geeft raakpunt $(-\frac{1}{2},\ -1)$
en raaklijn $-1y = -x + \frac{1}{2}$ ofwel $x - y = \frac{1}{2}$.

19c De poollijn van $C(0,1)$ ten opzichte van $y^2-2y=3x-10$ $(y\cdot y-y-y=1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}x-10)$
is $1y-y-1=1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}\cdot 0-10$ ofwel $1\frac{1}{2}x-9=0$ ofwel $x=6$.

$\begin{cases} x=6 \text{ ❶} \\ y^2-2y=3x-10 \text{ ❷} \end{cases}$

❶ in ❷ $\Rightarrow y^2-2y=18-10$

$y^2-2y-8=0$

$(y+2)(y-4)=0$

$y=-2 \vee y=4$ (hiernaast verder)

$y=-2$ in ❶ $\Rightarrow x=6$ geeft raakpunt $(6,-2)$ en raaklijn
$-2y-y+2=1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}\cdot 6-10$ ofwel $-3y=1\frac{1}{2}x-3$ ofwel $x+2y=2$,
$y=4$ in ❶ $\Rightarrow x=6$ geeft raakpunt $(6,4)$ en raaklijn
$4y-y-4=1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}\cdot 6-10$ ofwel $3y=1\frac{1}{2}x+3$ ofwel $x-2y=-2$.

20a $a=1$ en $p=2$ geeft k: $y-2=1(x-3)+\frac{2}{2\cdot 1}\Rightarrow y-2=x-3+1$. Dus k: $y=x$.

20b l: $(4-2)(y-2)=2(x-3)+2(4-3)$ (delen door 2) $\Rightarrow y-2=x-3+1$. Dus l: $y=x$.

20c Raaklijn m in B: $(1-2)(y-2)=2(x-3)+2(3\frac{1}{4}-3)\Rightarrow -(y-2)=2(x-3)+\ldots\Rightarrow 2x+y=\ldots$
Normaal n: $x-2y=c$ door $B(3\frac{1}{4},1)\Rightarrow 3\frac{1}{4}-2\cdot 1=c\Rightarrow 1\frac{1}{4}=c$. Dus n: $x-2y=1\frac{1}{4}$.

21a $y=-x+3$ (verm. met -2) $\Rightarrow -2y=2x-6$.

21b De poollijn van $P(x_P,y_P)$ t.o.v. $y^2=4x$ $(y\cdot y=2x+2x)$ is $y_P\cdot y=2x+2x_P$.
Voor de pool P van de lijn k: $y_P\cdot y=2x+2x_P$ moet gelden $y_P\cdot y=-2y$ en $2x_P=-6\Rightarrow y_P=-2$ en $x_P=-3$.
Dus $P(-3,-2)$ is de pool die bij de poollijn $y=-x+3$ hoort.

21c De poollijn van $Q(x_Q,y_Q)$ t.o.v. $y^2=4x$ $(y\cdot y=2x+2x)$ is $y_Q\cdot y=2x+2x_Q$, maar ook $4x-7y=8$ (gegeven).
Voor de pool Q van de lijn $4x-2y_Q\cdot y=-4x_Q$ moet gelden $-2y_Q=-7$ en $-4x_Q=8\Rightarrow y_Q=3\frac{1}{2}$ en $x_Q=-2$.
Dus $Q(-2,3\frac{1}{2})$ is de pool die bij de poollijn $4x-7y=8$ hoort.

22a De poollijn van $A(-3\frac{1}{2},\frac{5}{8})$ t.o.v. $4y^2=9x$ $(4y\cdot y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}x)$ is
$4\cdot\frac{5}{8}y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}\cdot -3\frac{1}{2}$ (verm. met 2) $\Rightarrow 5y=9x+9\cdot -3\frac{1}{2}$ (verm. met 2) $\Rightarrow 10y=18x+9\cdot -7$. Dus k: $18x-10y=63$.

22b De poollijn van $B(-2,\frac{3}{4})$ t.o.v. $4y^2=9x$ ❶ $(4y\cdot y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}x)$ is
$4\cdot\frac{3}{4}y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}\cdot -2\Rightarrow 3y=4\frac{1}{2}x-9$ (verm. met 2) $\Rightarrow 6y=9x-18$ (delen door 3) $\Rightarrow 2y=3x-6$ ❷.
De poollijn snijden met de parabool geeft de raakpunten. ❷ in ❶ geeft dan:
$(3x-6)^2=9x\Rightarrow 9x^2-36x+36=9x\Rightarrow x^2-4x+4=x\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow (x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=1 \vee x=4$.
$x=1$ in ❷ geeft $y=-\frac{3}{2}$ met raakpunt $(1,-\frac{3}{2})$ en raaklijn: $4\cdot -\frac{3}{2}y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}\cdot 1\Rightarrow 9x+12y=-9\Rightarrow 3x+4y=-3$.
$x=4$ in ❷ geeft $y=3$ met raakpunt $(4,3)$ en raaklijn: $4\cdot 3y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}\cdot 4\Rightarrow 9x-24y=-36\Rightarrow 3x-8y=-12$.

22c De poollijn van $C(x_C,y_C)$ t.o.v. $4y^2=9x$ $(4y\cdot y=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}x)$ is $4y_Cy=4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}x_C\Rightarrow 9x-8y_Cy=-9x_C$.
De poollijn is ook $9x+24y=45$ (gegeven) $\Rightarrow -8y_C=24$ en $-9x_C=45\Rightarrow y_C=-3$ en $x_C=-5$. Dus $C(-5,-3)$.

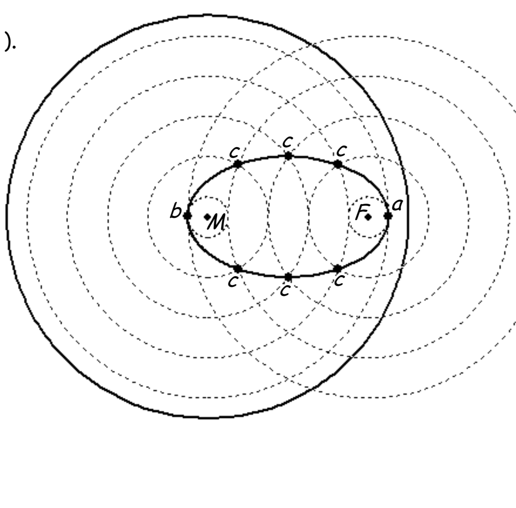
23 De poollijn van $P(-2,2)$ t.o.v. $y^2=2p(x-a)$ $(y\cdot y=p(x-a)+p(x-a))$ is $2y=p(x-a)+p(-2-a)$.
Dus l: $2y=px-ap-2p-ap$, maar ook (gegeven) l: $y=-3x+12$ ofwel $2y=-6x+24$.
Er moet dan gelden: $p=-6$ en $-ap-2p-ap=24\Rightarrow 6a+12+6a=24\Rightarrow 12a=12\Rightarrow a=1$.

24a $d(P,F)=\frac{1}{2}\Rightarrow P$ op de cirkel met middelpunt F en $r=\frac{1}{2}$.
$d(P,c)=\frac{1}{2}\Rightarrow P$ op de cirkel met middelpunt M en $r=4\frac{1}{2}$ (of $r=5\frac{1}{2}$).
Er is één punt P dat voldoet aan $d(P,F)=d(P,c)=\frac{1}{2}$.

24b $d(P,F)=4\frac{1}{2}\Rightarrow P$ op de cirkel met middelpunt F en $r=4\frac{1}{2}$.
$d(P,c)=4\frac{1}{2}\Rightarrow P$ op de cirkel met middelpunt M en $r=\frac{1}{2}$.
Er is één punt P dat voldoet aan $d(P,F)=d(P,c)=4\frac{1}{2}$.

24c Er zijn twee punten P die voldoet aan $d(P,F)=d(P,c)=1\frac{1}{2}$.
Er zijn twee punten P die voldoet aan $d(P,F)=d(P,c)=2\frac{1}{2}$.
Er zijn twee punten P die voldoet aan $d(P,F)=d(P,c)=3\frac{1}{2}$.

24d Zie de figuur hiernaast.



25 $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b$

$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2b$

$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2b - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$ (kwadrateren)

$x^2 + (y+c)^2 = 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$

$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 + (y-c)^2 - (y+c)^2$

$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 + y^2 - 2cy + c^2 - y^2 - 2cy - c^2$

$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 - 4cy$

$b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = b^2 - cy$ (kwadrateren)

$b^2(x^2 + (y-c)^2) = (b^2 - cy)^2$

$b^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$

$b^2x^2 + b^2y^2 - 2b^2cy + b^2c^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$

$b^2x^2 + b^2y^2 - c^2y^2 = b^4 - b^2c^2$

$b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = b^2(b^2 - c^2)$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (delen door a^2b^2)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

26 Voor een cirkel geldt: $d(P, M) = r \Rightarrow 2d(P, M) = 2r \Rightarrow d(P, M) + d(P, M) = 2r.$
Dus een cirkel is een ellips waarvan beide brandpunten samenvallen met M.

27a $a = 5$ en $b = 3 \Rightarrow$ ellips: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

27b $a = 6,\ c = 5$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 5^2 = 11 \Rightarrow$ ellips:: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$

27c $b = 4,\ c = 5$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 5^2 = 41 \Rightarrow$ ellips:: $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1.$

27d $a = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ door $(1, 2) \Rightarrow \frac{1^2}{9} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{2}{9}$. Dus ellips: $\frac{x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} = 1$ of $x^2 + 2y^2 = 9.$

27e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ofwel $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ door $(2, \sqrt{2})$

$b^2 \cdot 2^2 + a^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = a^2b^2 \Rightarrow 4b^2 + 2a^2 = a^2b^2$

$c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $a^2 = 9 + b^2$

Substitutie van $a^2 = 9 + b^2$ in $4b^2 + 2a^2 = a^2b^2$ geeft

$4b^2 + 2(9 + b^2) = (9 + b^2)b^2$

$4b^2 + 18 + 2b^2 = 9b^2 + b^4$

$b^4 + 3b^2 - 18 = 0$

$(b^2 + 6)(b^2 - 3) = 0$

$b^2 = -6$ (vold. niet) $\vee$ $b^2 = 3$ (vold)

$b^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 12.$

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$

28a Het middelpunt van de richtcirkel $(x+3)^2 + y^2 = 100$ is het andere brandpunt van de ellips.
De brandpunten zijn dus $F_1(-3, 0)$ en $F_2(3, 0) \Rightarrow$ het middelpunt van de ellips is $O(0, 0)$ (midden tussen de brandpunten).

28b $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$ én $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow r = 2a = 10 \Rightarrow a = 5.$
$a = 5,\ c = 3$ en $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4.$

29 $x^2 + y^2 - 8y - 84 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-4)^2 - 16 - 84 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-4)^2 = 100.$
Cirkel met middelpunt $(0, 4)$ en straal $r = \sqrt{100} = 10.$
De conflictlijn is een ellips met brandpunten $(0, -4)$ en $(0, 4)$ en middelpunt $(0, 0)$.
Het middelpunt van de ellips is het midden van lijnstuk F_1F_2 en dat is de oorsprong.
De vergelijking van de ellips is van de vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
$d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$ én $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b \Rightarrow r = 2b = 10 \Rightarrow b = 5.$
$b = 5,\ c = 4$ en $c^2 = b^2 - a^2$ geeft $a^2 = b^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$. Dus een vergelijking van de conflictlijn is $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$

30a $a^2 = 10$ en $b^2 = 6 \Rightarrow$ de toppen zijn $(-\sqrt{10}, 0)$; $(\sqrt{10}, 0)$; $(0, -\sqrt{6})$ en $(0, \sqrt{6})$.

30b $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ (vermenigvuldig links en rechts met 30) $\Rightarrow 30 \cdot \frac{x^2}{10} + 30 \cdot \frac{y^2}{6} = 30 \cdot 1$ ofwel $3x^2 + 5y^2 = 30.$

30c $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 30 & ❶ \\ y = 2x - 3\frac{1}{2} & ❷ \end{cases}$

❷ in ❶ $\Rightarrow 3x^2 + 5(2x - 3\frac{1}{2})^2 = 30$

```
2*2*-3.5
                 -14
(-3.5)²
               12.25
```

$3x^2 + 5(4x^2 - 14x + 12\frac{1}{4}) = 30$

$3x^2 + 20x^2 - 70x + 61\frac{1}{4} - 30 = 0$

$23x^2 - 70x + 31\frac{1}{4} = 0$

$D = (-70)^2 - 4 \cdot 23 \cdot 31\frac{1}{4} = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = 45$

$x = \frac{70 - 45}{46} = \frac{25}{46} \ \vee\ x = \frac{70 + 45}{46} = \frac{115}{46} = \frac{5}{2}.$

```
(70-45)/46▸Frac
              25/46
Ans*2-3.5▸Frac
            -111/46
```

```
(70+45)/46▸Frac
                5/2
Ans*2-3.5▸Frac
                3/2
```

$x = \frac{25}{46}$ in ❶ $\Rightarrow y = -\frac{111}{46}$ en

$x = \frac{5}{2}$ in ❶ $\Rightarrow y = \frac{3}{2}.$

Dus de snijpunten zijn $(\frac{25}{46}, -\frac{111}{46})$ en $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

31a $A(1, 2)$ op de ellips $px^2 + qy^2 = 35 \Rightarrow p \cdot 1^2 + q \cdot 2^2 = 35$, dus $p + 4q = 35$.
$B(3, 1)$ op de ellips $px^2 + qy^2 = 35 \Rightarrow p \cdot 3^2 + q \cdot 1^2 = 35$, dus $9p + q = 35$.

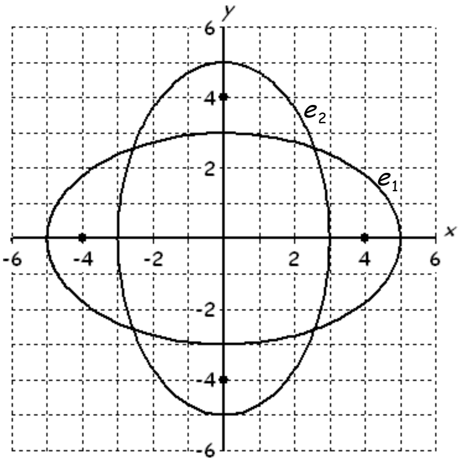
$$\begin{cases} p + 4q = 35 \text{ ❶} & \times 1 \\ 9p + q = 35 \text{ ❷} & \times 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + 4q = 35 \text{ ❶} \\ \underline{36p + 4q = 140 \text{ ❸}} \; - \end{cases}$$

$-35p = -105 \Rightarrow p = 3$ in ❶ $\Rightarrow 3 + 4q = 35 \Rightarrow 4q = 32 \Rightarrow q = 8$.

31b $3x^2 + 8y^2 = 35 \Rightarrow \frac{3x^2}{35} + \frac{8y^2}{35} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{35}{3}} + \frac{y^2}{\frac{35}{8}} = 1$. Dus $a^2 = \frac{35}{3}$ en $b^2 = \frac{35}{8}$

$a^2 > b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = \frac{35}{3} - \frac{35}{8} = \frac{35 \cdot 8}{3 \cdot 8} - \frac{35 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{35 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{175}{24} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{175}{24}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdot \frac{6}{6}} = \frac{5}{2 \cdot 6} \cdot \sqrt{42} = \frac{5}{12}\sqrt{42}$.
Dus de brandpunten zijn $(-\frac{5}{12}\sqrt{42}, 0)$ en $(\frac{5}{12}\sqrt{42}, 0)$.

32a e_1: $9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Dus $a = 5$ en $b = 3$.
e_2: $25x^2 + 9y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Dus $a = 3$ en $b = 5$.
Zie de ellipsen hiernaast.



32b Bij translatie $(5, 6)$ vervang je in de formule x door $x - 5$ en y door $y - 6$.
e_1: $9x^2 + 25y^2 = 225 \xrightarrow{\text{Tr. }(5,6)} 9(x-5)^2 + 25(y-6)^2 = 225$.
met toppen $(-5, 0)$; $(5, 0)$ $(0, -3)$; en $(0, 3)$ — met toppen $(0, 6)$; $(10, 6)$; $(5, 3)$ en $(5, 9)$

32c e_2: $25x^2 + 9y^2 = 225 \xrightarrow{\text{Tr. }(5,6)} 25(x-5)^2 + 9(y-6)^2 = 225$.
toppen: $(-3, 0)$; $(3, 0)$; $(0, -5)$ en $(0, 5)$ — toppen: $(2, 6)$; $(7, 6)$; $(5, 1)$ en $(5, 11)$
brandpunten: $(0, -4)$ en $(0, 4)$ — brandpunten: $(5, 2)$ en $(5, 10)$

33 $9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Dus $a = 2$ en $b = 3$ (omdat $b > a$ liggen de brandpunten op de verticale as).
$b > a \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.
Dus de brandpunten zijn $(0, -\sqrt{5})$ en $(0, \sqrt{5})$.

34a $5x^2 + y^2 = 5$ ofwel $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1 \xrightarrow{\text{Tr. }(2,-3)} 5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$.
toppen: $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(0, -\sqrt{5})$ en $(0, \sqrt{5})$ — toppen: $(1, -3)$; $(3, -3)$; $(2, -3-\sqrt{5})$ en $(2, -3+\sqrt{5})$
brandpunten: $(0, -2)$ en $(0, 2)$ — brandpunten $(2, -5)$ en $(2, -1)$

34b
$4x^2 + 25y^2 + 16x - 84 = 0$
$4x^2 + 16x + 25y^2 - 84 = 0$
$4(x^2 + 4x) + 25y^2 - 84 = 0$
$4\left((x+2)^2 - 4\right) + 25y^2 - 84 = 0$
$4(x+2)^2 - 16 + 25y^2 - 84 = 0$
$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$.

$4x^2 + 25y^2 = 100 \xrightarrow{\text{Tr. }(-2,0)} 4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$.
Van $4x^2 + 25y^2 = 100$ ofwel $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ zijn de toppen $(-5, 0)$; $(5, 0)$; $(0, -2)$ en $(0, 2)$ en de brandpunten $(-\sqrt{21}, 0)$ en $(\sqrt{21}, 0)$.
Van $4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$ zijn de toppen $(-7, 0)$; $(3, 0)$; $(-2, -2)$ en $(-2, 2)$ en de brandpunten $(-2-\sqrt{21}, 0)$ en $(-2+\sqrt{21}, 0)$.

34c
$9x^2 + 10y^2 - 80y - 200 = 0$
$9x^2 + 10(y^2 - 8y) - 200 = 0$
$9x^2 + 10\left((y-4)^2 - 16\right) - 200 = 0$
$9x^2 + 10(y-4)^2 - 160 - 200 = 0$
$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$.

$9x^2 + 10y^2 = 360 \xrightarrow{\text{Tr. }(0,4)} 9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$.
Van $9x^2 + 10y^2 = 360$ ofwel $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ zijn de toppen $(-\sqrt{40}, 0)$; $(\sqrt{40}, 0)$; $(0, -6)$ en $(0, 6)$ en de brandpunten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$. $(\sqrt{40} = 2\sqrt{10})$
Van $9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$ zijn de toppen $(-\sqrt{40}, 4)$; $(\sqrt{40}, 4)$; $(0, -2)$ en $(0, 10)$ en de brandpunten $(-2, 4)$ en $(2, 4)$.

34d
$36x^2 + 11y^2 + 72x - 66y = 261$
$36x^2 + 72x + 11y^2 - 66y = 261$
$36(x^2 + 2x) + 11(y^2 - 6y) = 261$
$36\left((x+1)^2 - 1\right) + 11\left((y-3)^2 - 9\right) = 261$
$36(x+1)^2 - 36 + 11(y-3)^2 - 99 = 261$
$36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$.

$36x^2 + 11y^2 = 396 \xrightarrow{\text{Tr. }(-1,3)} 36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$.
Van $36x^2 + 11y^2 = 396$ ofwel $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$ zijn de toppen $(-\sqrt{11}, 0)$; $(\sqrt{11}, 0)$; $(0, -6)$ en $(0, 6)$ en de brandpunten $(0, -5)$ en $(0, 5)$.
Van $36(x+1)^2 + 11(y-3)^2 = 396$ zijn de toppen $(-1-\sqrt{11}, 3)$; $(-1+\sqrt{11}, 3)$; $(-1, -3)$ en $(-1, 9)$ en de brandpunten $(-1, -2)$ en $(-1, 8)$.

35a $16x^2+25y^2-64x+50y=311$
$16x^2-64x+25y^2+50y=311$
$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$
$16\left((x-2)^2-4\right)+25\left((y+1)^2-1\right)=311$
$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$
$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400.$
$16x^2+25y^2=400 \xrightarrow{\text{Tr. }(2,-1)} 16(x-2)^2+25(y+1)^2=400.$
Van $16x^2+25y^2=400$ ofwel $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ is
$y=0$ (de x-as) de lange as en zijn de brandpunten $(-3,0)$ en $(3,0)$.
Van $16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$ is
$y=-1$ de lange as en zijn de brandpunten $(-1,\,-1)$ en $(5,\,-1)$.
Voor k geldt: k: $x=-1$ of k: $x=5$. (hiernaast verder)

Vanwege de symmetrie van de ellips maakt het niet uit welke k je neemt.
Kies k: $x=5$ (een positief getal rekent beter).
$x=5$ invullen in een vergelijking van de ellips:
$16(5-2)^2+25(y+1)^2=400$
$16\cdot 9+25(y+1)^2=400$
$25(y+1)^2=256$
$(y+1)^2=\frac{256}{25}$

```
400-16*9
                256
√(Ans
                 16
```

$y+1=-\frac{16}{5} \vee y+1=\frac{16}{5}$
$y=-\frac{21}{5} \vee y=\frac{11}{5}$
Dus $A(5,\,-\frac{21}{5})$ en $B(5,\,\frac{11}{5})$.
Dit geeft $AB=\frac{11}{5}--\frac{21}{5}=\frac{32}{5}$.

35b Snijden met de x-as ($y=0$).
$16(x-2)^2+25\cdot 1^2=400$
$16(x-2)^2=375$
$(x-2)^2=\frac{375}{16}=\frac{25\cdot 15}{16}$

```
375/25
                 15
```

$x-2=-\frac{5}{4}\sqrt{15} \vee x-2=\frac{5}{4}\sqrt{15}$
$x=2-\frac{5}{4}\sqrt{15} \vee x=2+\frac{5}{4}\sqrt{15}$
Dus $CD=2+\frac{5}{4}\sqrt{15}-(2-\frac{5}{4}\sqrt{15})=\frac{10}{4}\sqrt{15}=\frac{5}{2}\sqrt{15}$.

35c Snijden met de y-as ($x=0$).
$16\cdot(-2)^2+25(y+1)^2=400$
$25(y+1)^2=336$
$(y+1)^2=\frac{336}{25}=\frac{16\cdot 21}{25}$

```
336/4
                 84
Ans/4
                 21
```

$y+1=-\frac{4}{5}\sqrt{21} \vee y+1=\frac{4}{5}\sqrt{21}$
$y=-1-\frac{4}{5}\sqrt{21} \vee y=-1+\frac{4}{5}\sqrt{21}$
Dus $CD=-1+\frac{4}{5}\sqrt{21}-(-1-\frac{4}{5}\sqrt{21})=\frac{8}{5}\sqrt{21}$.

36a $10x^2+ay^2-80x+4ay+160-6a=0$
$10x^2-80x+ay^2+4ay+160-6a=0$
$10(x^2-8x)+a(y^2+4y)+160-6a=0$
$10\left((x-4)^2-16\right)+a\left((y+2)^2-4\right)+160-6a=0$
$10(x-4)^2-160+a(y+2)^2-4a+160-6a=0$
$10(x-4)^2+a(y+2)^2=10a$
$\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1.$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1 \xrightarrow{\text{Tr. }(4,-2)} \frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1.$
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ heeft als toppen
$(-\sqrt{a},0)$; $(\sqrt{a},0)$; $(0,\,-\sqrt{10})$ en $(0,\sqrt{10})$.
Dus $\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ heeft als toppen
$(4-\sqrt{a},\,-2)$; $(4+\sqrt{a},\,-2)$; $(4,\,-2-\sqrt{10})$ en $(4,\,-2+\sqrt{10})$.

$(7,\,-2)$ is een top als $4-\sqrt{a}=7$ ($\Rightarrow \sqrt{a}=-3$ kan niet) of $4+\sqrt{a}=7 \Rightarrow \sqrt{a}=3 \Rightarrow a=9$.

36b $a>10 \Rightarrow$ van $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ zijn de brandpunten $(-c,0)$ en $(c,0)$ met $c^2=a-10$.
en van $\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ zijn de brandpunten $(4-c,\,-2)$ en $(4+c,\,-2)$ met $c^2=a-10$.
Dus $(7,\,-2)$ is een brandpunt als $4-c=7$ of $4+c=7 \Rightarrow \pm c=3 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow a-10=9 \Rightarrow a=19$ (>10 voldoet).

36c $a<10 \Rightarrow$ van $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{10}=1$ zijn de brandpunten $(0,\,-c)$ en $(0,c)$ met $c^2=10-a$.
en van $\frac{(x-4)^2}{a}+\frac{(y+2)^2}{10}=1$ zijn de brandpunten $(4,\,-2-c)$ en $(4,\,-2+c)$ met $c^2=10-a$.
Dus $(4,0)$ is een brandpunt als $-2-c=0$ of $-2+c=0 \Rightarrow \pm c=2 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow 10-a=4 \Rightarrow a=6$ (<10 voldoet).

37a $2^2+4\cdot(\sqrt{3})^2=4+4\cdot 3=16$ en dat klopt. Dus $(2,\sqrt{3})$ ligt op de ellips.

37b $P(2,\sqrt{3})$ ligt op $y=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}$ want $y_P=\sqrt{3}>0$.

37c $y=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\frac{1}{2}x=-\frac{x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=-\frac{x}{4y}$.
Dus $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(2,\sqrt{3})}=-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{6}\sqrt{3}$.
Een vergelijking van de raaklijn in $P(2,\sqrt{3})$ is: $y-\sqrt{3}=-\frac{1}{6}\sqrt{3}(x-2)$.

37d $y=-\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}\cdot -\frac{1}{2}x=\frac{x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}}=\frac{x}{-4y}=-\frac{x}{4y}$.

38a Als $y_A < 0$ dan ligt A op de halve ellips $y = -\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}} \cdot -\frac{2b^2}{a^2}x = \frac{b^2x}{a^2\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2+b^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

Dus een vergelijking van de raaklijn in $A(x_A, y_A)$ is k: $y - y_A = -\frac{b^2x_A}{a^2y_A}(x - x_A)$.

$a^2y_A(y - y_A) = -b^2x_A(x - x_A)$

$a^2y_Ay - a^2y_A^2 = -b^2x_Ax + b^2x_A^2$

$b^2x_Ax + a^2y_Ay = b^2x_A^2 + a^2y_A^2$

A ligt op de ellips, dus $b^2x_A^2 + a^2y_A^2 = a^2b^2$

$b^2x_Ax + a^2y_Ay = a^2b^2$

$\frac{x_Ax}{a^2} + \frac{y_Ay}{b^2} = 1$ (dus de raaklijn in het raakpunt kan direct opgeschreven worden met behulp van halfsubstitutie)

38b $y_A = 0$ geeft $\frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$. De raakpunten zijn dan $(-a, 0)$ en $(a, 0)$ (twee toppen van de ellips).

Raken in $(-a, 0)$ geeft $\frac{-ax}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = -a$ en raken in $(a, 0)$ geeft $\frac{ax}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a$

Dit klopt, want in de toppen $(-a, 0)$ en $(a, 0)$ zijn de raaklijnen verticaal met de vergelijkingen $x = -a$ en $x = a$.

Dus de formule geeft ook voor $y_A = 0$ de juiste vergelijking van de raaklijn.

39a Raken in $A(3,\ -1)$ geeft (met halfsubstitutie) $2 \cdot 3x + 5 \cdot -y = 23$ ofwel k: $6x - 5y = 23$.

39b Raken in $B(4, 1)$ geeft (met halfsubstitutie) $\frac{4x}{18} + \frac{y}{9} = 1$ ofwel l: $2x + y = 9$.

39c Raken in $C(2, 5)$ geeft (met halfsubstitutie) $7 \cdot 2x + 2 \cdot 5y = 78$ ofwel $7x + 5y = 39$.

$\left.\begin{array}{l} m \perp 7x + 5y = 39 \Rightarrow m\text{: } 5x - 7y = c \\ \text{door } C(2, 5) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = c \Rightarrow -25 = c$. Dus m: $5x - 7y = -25$.

39d Raken in $D(3, 2)$ geeft (met halfsubstitutie) $\frac{3x}{15} + \frac{2y}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow$ ofwel $x + y = 5$.

$\left.\begin{array}{l} n \perp x + y = 5 \Rightarrow n\text{: } x - y = c \\ \text{door } D(3, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 2 = c \Rightarrow 1 = c$. Dus n: $x - y = 1$.

40a Stel het raakpunt $A(x_A, y_A)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $2x_A \cdot x + a^2y_A \cdot y = 16$.

Raaklijn $2x_A \cdot x + a^2y_A \cdot y = 16$ valt samen met k: $x - y = 8 \Rightarrow \frac{2x_A}{1} = \frac{a^2y_A}{-1} = \frac{16}{8} = 2$.

Uit $\frac{2x_A}{1} = 2$ volgt $x_A = 1 \Rightarrow$ invullen in k geeft $1 - y_A = 8 \Rightarrow y_A = -7$.

Uit $\frac{a^2y_A}{-1} = 2$ én $y_A = -7$ volgt dan $7a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{7}$.

40b Stel het raakpunt $B(x_B, y_B)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $b^2x_B \cdot x + 8y_B \cdot y = 88$.

Raaklijn $b^2x_B \cdot x + 8y_B \cdot y = 88$ valt samen met l: $5x + 2y = 22 \Rightarrow \frac{b^2x_B}{5} = \frac{8y_B}{2} = \frac{88}{22} = 4$.

Uit $\frac{8y_B}{2} = 4$ volgt $y_B = 1 \Rightarrow$ invullen in l geeft $5x_B + 2 \cdot 1 = 22 \Rightarrow 5x_B = 20 \Rightarrow x_B = 4$.

Uit $\frac{b^2x_B}{5} = 4$ én $x_B = 4$ volgt dan $4b^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5$.

41a Stel het raakpunt $A(x_A, y_A)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $x_A \cdot x + 2y_A \cdot y = 18$.

Raaklijn $x_Ax + 2y_Ay = 18$ valt samen met k: $y = 2x + b$ ofwel k: $2x - y = -b \Rightarrow \frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1} = \frac{18}{-b}$.

41b Uit $\frac{x_A}{2} = \frac{2y_A}{-1}$ volgt $4y_A = -x_A \Rightarrow y_A = \frac{-x_A}{4} = -\frac{1}{4}x_A$.

Dus voor A geldt $y = -\frac{1}{4}x$ (zie hierboven) $\wedge$ $x^2 + 2y^2 = 18$ (immers A ligt op de gegeven ellips). Nu y elimineren (uitstoten):

$x^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{4}x)^2 = 18$

$x^2 + \frac{2}{16}x^2 = 18$

$\frac{9}{8}x^2 = 18$

$x^2 = \frac{18 \cdot 8}{9} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 8}{9} = 2 \cdot 8 = 16$

$\begin{cases} x = -4 \\ y = -\frac{1}{4} \cdot -4 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1. \end{cases}$

41c $y = 2x + b$ door $A(-4, 1) \Rightarrow 1 = -8 + b \Rightarrow b = 9$.

$y = 2x + b$ door $A(4,\ -1) \Rightarrow -1 = 8 + b \Rightarrow b = -9$.

42a Stel het raakpunt $A(x_A, y_A)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$.
Raaklijn $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$ valt samen met $y = -\frac{3}{5}x + b$ ofwel $\frac{3}{5}x + y = b$ ofwel $3x + 5y = 5b \Rightarrow \frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{5} = \frac{38}{5b}$.
Uit $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{5}$ volgt $10x_A = 15y_A \Rightarrow y_A = \frac{2}{3}x_A$.
Dus voor A geldt $y = \frac{2}{3}x$ (zie hierboven) $\wedge$ $2x^2 + 5y^2 = 38$ (immers A ligt op de gegeven ellips). Nu y elimineren.
$2x^2 + 5 \cdot (\frac{2}{3}x)^2 = 38 \Rightarrow 2x^2 + \frac{20}{9}x^2 = 38 \Rightarrow \frac{38}{9}x^2 = 38 \Rightarrow x^2 = \frac{38 \cdot 9}{38} = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
$x = -3$ met $y = \frac{2}{3} \cdot -3 = -2$ geeft raakpunt $(-3, -2)$ en $x = 3$ met $y = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ geeft raakpunt $(3, 2)$.

42b De raaklijnen aan de ellips zijn $y = \frac{3}{5}x + b$
Stel het raakpunt $A(x_A, y_A)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$.
Raaklijn $2x_A \cdot x + 5y_A \cdot y = 38$ valt samen met $y = \frac{3}{5}x + b$ ofwel $3x - 5y = -5b \Rightarrow \frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{-5} = \frac{38}{-5b}$.
Uit $\frac{2x_A}{3} = \frac{5y_A}{-5}$ volgt $15y_A = -10x_A \Rightarrow y_A = -\frac{2}{3}x_A$.
Dus voor A geldt $y = -\frac{2}{3}x$ (zie hierboven) $\wedge$ $2x^2 + 5y^2 = 38$ (immers A ligt op de gegeven ellips). Nu y elimineren.
$2x^2 + 5 \cdot (-\frac{2}{3}x)^2 = 38 \Rightarrow 2x^2 + \frac{20}{9}x^2 = 38 \Rightarrow \frac{38}{9}x^2 = 38 \Rightarrow x^2 = \frac{38 \cdot 9}{38} = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
$x = -3$ met $y = -\frac{2}{3} \cdot -3 = 2$ geeft raakpunt $(-3, 2)$ en $x = 3$ met $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2$ geeft raakpunt $(3, -2)$.

43a Raken in $A(-4, 3)$ geeft (met halfsubstitutie) k: $3 \cdot -4x + 4 \cdot 3y = 84$ ofwel k: $-12x + 12y = 84$ ofwel k: $x - y = -7$.
Raken in $B(-1, -4\frac{1}{2})$ geeft l: $3 \cdot -x + 4 \cdot -4\frac{1}{2}y = 84$ ofwel l: $-3x - 18y = 84$ ofwel l: $x + 6y = -28$.

43b $\begin{cases} x - y = -7 \\ x + 6y = -28 \end{cases}$ ❶ ❷ $-$
$-7y = 21 \Rightarrow y = -3$ in ❶ $\Rightarrow x + 3 = -7 \Rightarrow x = -10$. Dus $P(-10, -3)$.

43c AB: $y - 3 = \frac{-4\frac{1}{2} - 3}{-1 - -4} \cdot (x + 4)$ ofwel $y - 3 = \frac{-7\frac{1}{2}}{3} \cdot (x + 4)$ ofwel $y - 3 = -2\frac{1}{2}x - 10$ ofwel $y = -2\frac{1}{2}x - 7$.

43d $x_P = -10$ en $y_P = -3$ invullen in $3x_P \cdot x + 4y_P \cdot y = 84$ geeft $-30x - 12y = 84 \Rightarrow 5x + 2y = -14 \Rightarrow y = -2\frac{1}{2}x - 7$.

44a De lijn k gaat door een punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in $A(x_A, y_A) \Rightarrow k$: $\frac{x_A x_P}{a^2} + \frac{y_A y_P}{b^2} = 1$.
De lijn k gaat door een punt $P(x_P, y_P)$ buiten de ellips en raakt de ellips in $B(x_B, y_B) \Rightarrow k$: $\frac{x_B x_P}{a^2} + \frac{y_B y_P}{b^2} = 1$.
De punten A en B liggen beide op de lijn met vergelijking: $\frac{x_P x}{a^2} + \frac{y_P y}{b^2} = 1$ (de poollijn van P ten opzichte van de ellips).

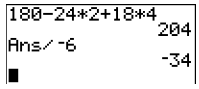
44b De poollijn van $Q(x_Q, y_Q)$ ten opzichte van de ellips e: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is de lijn l: $\frac{x_Q x}{a^2} + \frac{y_Q y}{b^2} = 1$.
Na een translatie (c, d) krijg je $Q'(x_Q + c, y_Q + d)$, e': $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ en l': $\frac{x_Q(x-c)}{a^2} + \frac{y_Q(y-d)}{b^2} = 1$ ❶.
Uit $P(x_P, y_P) = Q'(x_Q + c, y_Q + d)$ volgt $x_P = x_Q + c$ ofwel $x_Q = x_P - c$ ❷ en $y_P = y_Q + d$ ofwel $y_Q = y_P - c$ ❸.
❷ en ❸ invullen in ❶ geeft de poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de ellips $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$
is de lijn $\frac{(x_P - c)(x - c)}{a^2} + \frac{(x_P - c)(y - d)}{b^2} = 1$. (dus ook direct te vinden met halfsubstitutie)

45a De poollijn van A t.o.v. de ellips $x^2 + 8y^2 = 24$ is (met halfsubstitutie) $8x + 8 \cdot -1y = 24$ ofwel $x - y = 3$.
$\begin{cases} x - y = 3 \text{ ❶} \\ x^2 + 8y^2 = 24 \text{ ❷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 3 \text{ ❸} \\ x^2 + 8y^2 = 24 \text{ ❷} \end{cases}$
❸ in ❷ $\Rightarrow (y + 3)^2 + 8y^2 = 24$
$y^2 + 6y + 9 + 8y^2 = 24$
$9y^2 + 6y - 15 = 0$
$3y^2 + 2y - 5 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 4 + 60 = 64$
$y = \frac{-2 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$ in ❸ $\Rightarrow x = -\frac{5}{3} + 3 = \frac{4}{3}$ en $y = \frac{-2 + 8}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$ in ❸ $\Rightarrow x = 1 + 3 = 4$.
Raaklijn in $(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ aan de ellips $x^2 + 8y^2 = 24$ is (met halfsubstitutie) $\frac{4}{3}x + 8 \cdot -\frac{5}{3}y = 24$ ofwel $x - 10y = 18$.
Raaklijn in $(4, 1)$ aan de ellips $x^2 + 8y^2 = 24$ is (met halfsubstitutie) $4x + 8 \cdot 1y = 24$ ofwel $x + 2y = 6$.

45b Raaklijn (met halfsubstitutie) $(5-1)(x-1)+2(-4+3)(y+3)=18$
ofwel $4(x-1)-2(y+3)=18$ ofwel $4x-2y=28$. Dus k: $2x-y=14$.

45c Raaklijn (met halfsubstitutie) $2\cdot -6x+5\cdot 4y+4x+4\cdot -6-15y-15\cdot 4+16=0$
ofwel $-12x+20y+4x-15y=68$ ofwel $-8x+5y=68$. Dus l: $-8x+5y=68$.

46a Raaklijn (met halfsubstitutie) $4(-4-2)(x-2)+9(6-4)(y-4)=180$
ofwel $-24(x-2)+18(y-4)=180$ ofwel $-24x+18y=204$. Dus k: $4x-3y=-34$.

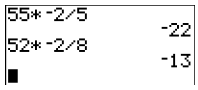


46b Raaklijn (met halfsubstitutie) $4(-1-2)(x-2)+9(8-4)(y-4)=180$
ofwel $-12(x-2)+36(y-4)=180$ ofwel $-12x+36y=\ldots$ ofwel $-x+3y=\ldots$
Dus n: $3x+y=c$ door $B(-1,8)\Rightarrow 3\cdot -1+8=c\Rightarrow c=5$. Dus n: $3x+y=5$.

47a k: $15x+8y=106$ (linker- en rechterlid $\times 2$) $\Rightarrow k$: $30x+16y=212$.

47b Raken in $A(x_A, y_A)$ geeft (met halfsubstitutie) k: $5x_A\cdot x+8y_A\cdot y=212$.
$5x_A\cdot x+8y_A\cdot y=212$ en $30x+16y=212$ vallen samen $\Rightarrow 5x_A=30$ en $8y_A=16\Rightarrow x_A=6$ en $y_A=2$. Dus $A(6, 2)$.

47c Poollijn van $B(x_B, y_B)$ geeft (met halfsubstitutie) k: $5x_B\cdot x+8y_B\cdot y=212$.
Dit moet $55x+52y=-106$ zijn $\Rightarrow \frac{5x_B}{55}=\frac{8y_B}{52}=\frac{212}{-106}=-2\Rightarrow x_B=-22$ en $y_B=-13$.



48a De poollijn van $A(8,\ -3)$ t.o.v. $2x^2+3y^2=30$ is (met halfsubstitutie) $2\cdot 8x+3\cdot -3y=30$ ofwel $16x-9y=30$.

48b De poollijn van $B(-6,\ -1)$ t.o.v. $2x^2+3y^2=30$ is (met halfsubstitutie) $2\cdot -6x+3\cdot -1y=30$ ofwel $4x+y=-10$.

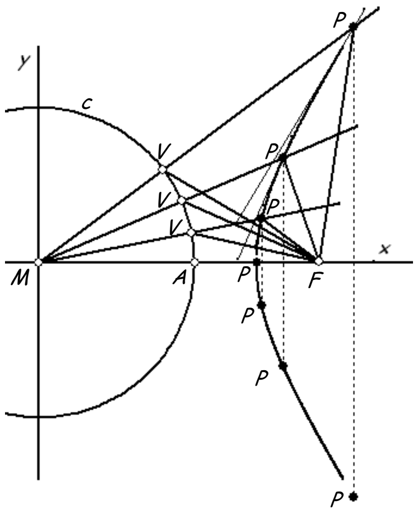
$$\begin{cases}4x+y=-10 & ❶\\ 2x^2+3y^2=30 & ❷\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}y=-4x-10 & ❸\\ 2x^2+3y^2=30 & ❷\end{cases}$$

❸ in ❷ $\Rightarrow 2x^2+3(-4x-10)^2=30$
$2x^2+3(16x^2+80x+100)=30$
$2x^2+48x^2+240x+300=30$
$50x^2+240x+270=0$
$5x^2+24x+27=0$
$D=24^2-4\cdot 5\cdot 27=36$
$x=\frac{-24-6}{2\cdot 5}=\frac{-30}{10}=-3$ in ❸ $\Rightarrow y=12-10=2$ en $x=\frac{-24+6}{2\cdot 5}=\frac{-18}{10}=-\frac{9}{5}$ in ❸ $\Rightarrow y=\frac{36}{5}-10=-\frac{14}{5}$.
Raaklijn in $(-3, 2)$ aan de ellips $2x^2+3y^2=30$ is (met halfsubstitutie) $2\cdot -3x+3\cdot 2y=30$ ofwel $x-y=-5$.
Raaklijn in $(-\frac{9}{5},\ -\frac{14}{5})$ aan de ellips $2x^2+3y^2=30$ is (met halfsubstitutie) $-\frac{18}{5}x-\frac{42}{5}y=30$ ofwel $3x+7y=-25$.

48c De poollijn van $C(x_C, y_C)$ t.o.v. $2x^2+3y^2=30$ is (met halfsubstitutie) l: $2x_C\cdot x+3y_C\cdot y=30$.
Ook l: $1\frac{1}{5}x+y=2$ ofwel l: $18x+15y=30\Rightarrow \frac{2x_C}{18}=\frac{3y_C}{15}=\frac{30}{30}=1\Rightarrow 2x_C=18$ en $3y_C=15\Rightarrow x_C=9$ en $y_C=5$.

49 De poollijn van $P(5,1)$ t.o.v. $px^2+(y-q)^2=52$ is (met halfsubstitutie) l: $p\cdot 5x+(1-q)(y-q)=52$
ofwel l: $5px-q+y-qy+q^2=52$ ofwel l: $5px+(1-q)y=52+q-q^2$.
Ook l: $15x-4y=32\Rightarrow \frac{5p}{15}=\frac{1-q}{-4}=\frac{52+q-q^2}{32}$
Uit $\frac{1-q}{-4}=\frac{52+q-q^2}{32}$ volgt
$-4(52+q-q^2)=32(1-q)$
$4q^2-4q-208=32-32q$
$4q^2+28q-240=0$
$q^2+7q-60=0$
$(q+12)(q-5)=0$
$q=-12 \vee q=5$.

$$\begin{cases}\frac{5p}{15}=\frac{1-q}{-4}\\ q=-12\end{cases}\Rightarrow \frac{5p}{15}=\frac{13}{-4}\Rightarrow p=-\frac{195}{20}=-\frac{39}{4}.$$
$$\begin{cases}\frac{5p}{15}=\frac{1-q}{-4}\\ q=5\end{cases}\Rightarrow \frac{5p}{15}=\frac{-4}{-4}=1\Rightarrow p=3.$$
Dus $\begin{cases}p=-\frac{39}{4}\\ q=-12\end{cases}\vee\begin{cases}p=3\\ q=5.\end{cases}$



50a P is het midden van lijnstuk AF.

50b Voor alle punten P op m is $d(P, V)=d(P, F)$
P ligt op het verlengde van $MV\Rightarrow d(P, V)=d(P, c)$
$\Rightarrow d(P, c)=d(P, F)$.
Dus P is een conflictpunt (ligt even ver) van c en F.

50c Zie de figuur hiernaast.

51a $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ (kwadrateren)

$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{\dots}+(x-c)^2+y^2$

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{\dots}+x^2-2cx+c^2+y^2$

$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ (delen door 4)

$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ (kwadrateren)

$(cx-a^2)^2=a^2\left((x-c)^2+y^2\right)$

$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$

$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$

$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

51b Lijnstuk F_1F_2 met lengte $2c$ snijdt de hyperbool in A en B.
De lengte van AB is $2a$. Er geldt dus $2c>2a$, dus $c>a>0$
en daarom is het toegestaan $c^2-a^2=b^2$ te stellen.

51c Voor $P(-x, y)$ op de andere hyperbooltak geldt
$|d(P, F_1)-d(P, F_2)|=2a$ ofwel

$\sqrt{(-x+c)^2+y^2}-\sqrt{(-x-c)^2+y^2}=2a$

$\sqrt{(-x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$ (kwadrateren)

$(-x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{\dots}+(-x-c)^2+y^2$

$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{\dots}+x^2+2cx+c^2+y^2$

$-4cx-4a^2=4a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$ (delen door -4)

$cx+a^2=-a\sqrt{(-x-c)^2+y^2}$ (kwadrateren)

$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$

$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$

$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$ (als in 51a)

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

Stel $c^2-a^2=b^2$ (zie 51b). Dit geeft

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ofwel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

52 Voor B op de hyperbool geldt $|d(B, F_1)-d(B, F_2)|=2b+AF_1-BF_2=2b.$
Voor $P(x, y)$ op de hyperbool geldt $|d(P, F_1)-d(P, F_2)|=2b.$
Dit geeft $\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b$ als P op de bovenste hyperbooltak ligt
en $\sqrt{x^2+(-y+c)^2}-\sqrt{x^2+(-y-c)^2}=2b$ als P op de onderste hyperbooltak ligt.
Net zoals bij opgave 51 leiden beide gevallen tot dezelfde vergelijking. (hieronder wordt het eerste geval uitgewerkt)

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b+\sqrt{x^2+(y-c)^2}$ (kwadrateren)

$x^2+(y+c)^2=4b^2+4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$

$x^2+y^2+2cy+c^2=4b^2+4b\sqrt{\dots}+x^2+y^2-2cy+c^2$

$4cy-4b^2=4b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$ (delen door 4)

$cy-b^2=b\sqrt{x^2+(y-c)^2}$ (kwadrateren)

$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2(x^2+y^2-2cy+c^2)$

$c^2y^2-2b^2cy+b^4=b^2x^2+b^2y^2-2b^2cy+b^2c^2$

$-b^2x^2+c^2y^2-b^2y^2=b^2c^2-b^4$

$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2=b^2(c^2-b^2)$

Stel $c^2-b^2=a^2$. Dit geeft

$-b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ofwel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$

53a $a=2,\ c=3 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=9-4=5$. Dus $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$

53b $b=3,\ c=4 \Rightarrow a^2=c^2-b^2=16-9=7$. Dus $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1.$

53c $a=4$ (en de toppen op de hor. as) $\Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

(12, 4) voldoet geeft $\frac{12^2}{16}-\frac{4^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ [$12^2/16$ 9]

$9-\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow -\frac{16}{b^2}=-8 \Rightarrow 8b^2=16 \Rightarrow b^2=2.$

De vergelijking van de hyperbool is $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{2}=1.$

53d
$c=5$ en $b^2=c^2-a^2=25-a^2 \Rightarrow$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$ ofwel $(25-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(25-a^2).$

(4, 3) voldoet $\Rightarrow (25-a^2)\cdot 4^2-a^2\cdot 3^2=a^2(25-a^2) \Rightarrow$

$400-16a^2-9a^2=25a^2-a^4$

$a^4-50a^2+400=0 \Rightarrow (a^2-10)(a^2-40)=0.$

$a^2=10 \Rightarrow b^2=15$ en $a^2=40 \Rightarrow b^2=-15$ (voldoet niet).

De vergelijking van de hyperbool is $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1.$

54a Eén van de brandpunten van de hyperbool is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(-4, 0)$ is een brandpunt.
Brandpunt $(-4, 0)$ en top $(3, 0)$ liggen op de x-as, dus het middelpunt van de hyperbool op de x-as. (maak een schets)
De top $(3, 0)$ ligt op afstand 1 van de cirkel en van het tweede brandpunt, dus het tweede brandpunt is $(4, 0)$.
De brandpunten zijn $(-4, 0)$ en $(4, 0)$ ($c=4$), dus het middelpunt van de hyperbool is de oorsprong.
De vergelijking van de hyperbool is van de vorm $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

54b $a=3$ (de toppen zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$) en $c=4 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=16-9=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}.$

55 Richtcirkel: $x^2+y^2+10y-39=0$ ofwel $x^2+(y+5)^2-25-39=0$ ofwel $x^2+(y+5)^2=64.$
Eén van de brandpunten van de hyperbool is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(0, -5)$ is een brandpunt.
Brandpunt $(0, -5)$ en top $(0, 4)$ liggen op de y-as, dus het middelpunt van de hyperbool op de y-as. (maak een schets)

De top (0, 4) ligt op afstand 1 van de cirkel en van het tweede brandpunt, dus het tweede brandpunt is (0, 5).
De brandpunten zijn $(0,\ -5)$ en $(0, 5)$ ($c = 5$), dus het middelpunt van de hyperbool is de oorsprong.
De vergelijking van de hyperbool is van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.
$b = 4$ (de toppen zijn $(0,\ -4)$ en $(0, 4)$) en $c = 5 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$. Dus de vergelijking is $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

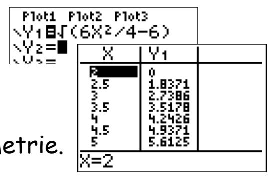
56a $3x^2 - 5y^2 = 30$ ofwel $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ ($\Rightarrow$ toppen en brandpunten op de hor. as en de x-as en de y-as zijn symmetrieassen).
$a^2 = 10$ ($a = \sqrt{10}$) en $b^2 = 6$ ($b = \sqrt{6}$) $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 10 + 6 = 16$ ($c = 4$).
Dus de toppen zijn $(-\sqrt{10}, 0)$ en $(\sqrt{10}, 0)$ en de brandpunten zijn $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

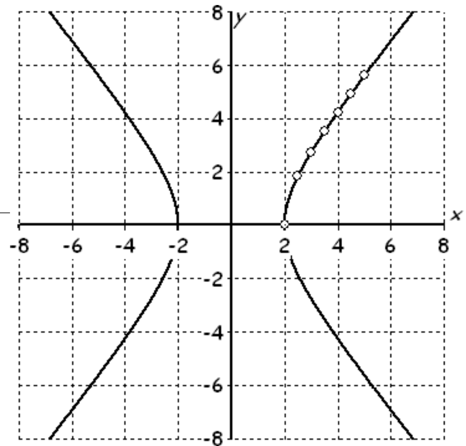
56b $\begin{cases} x + y = 8 \ ❶ \\ 3x^2 - 5y^2 = 30 \ ❷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - y \ ❸ \\ 3x^2 - 5y^2 = 30 \ ❷ \end{cases}$
❸ in ❷ $\Rightarrow 3(8 - y)^2 - 5y^2 = 30$
$3(64 - 16y + y^2) - 5y^2 = 30$
$192 - 48y + 3y^2 - 5y^2 - 30 = 0$ hiernaast verder
$-2y^2 - 48y + 162 = 0$
$y^2 + 24y - 81 = 0$
$(y + 27)(y - 3) = 0$
$y = -27$ in ❸ $\Rightarrow x = 8 + 27 = 35$
$y = 3$ in ❸ $\Rightarrow x = 8 - 3 = 5$.
De snijpunten zijn $(35,\ -27)$ en $(5, 3)$.

57a $A(5, 2)$ voldoet $\Rightarrow p \cdot 5^2 - q \cdot 2^2 = 80 \Rightarrow 25p - 4q = 80$.
$B(10,\ -8)$ voldoet $\Rightarrow p \cdot 10^2 - q \cdot (-8)^2 = 80 \Rightarrow 100p - 64q = 80$.
$\begin{cases} 25p - 4q = 80 \ ❶ \\ 100p - 64q = 80 \ ❷ \end{cases} \begin{vmatrix} \times 4 \\ \times 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 100p - 16q = 320 \ ❸ \\ \underline{100p - 64q = 80} \ ❷ \ - \end{cases}$
$48q = 240 \Rightarrow q = 5$ in ❶ $\Rightarrow 25p - 20 = 80 \Rightarrow 25p = 100 \Rightarrow p = 4$.

57b $p = 4$ en $q = 5 \Rightarrow$ hyperbool $4x^2 - 5y^2 = 80$ ofwel $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($\Rightarrow$ toppen en brandpunten op de horizontale as).
$a^2 = 20$ ($a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$) en $b^2 = 16$ ($b = 4$) $\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 16 = 36$ ($c = 6$).
Dus de toppen zijn $(-2\sqrt{5}, 0)$ en $(2\sqrt{5}, 0)$ en de brandpunten zijn $(-6, 0)$ en $(6, 0)$.

58a $3x^2 - 2y^2 = 12$ ofwel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$.
(toppen en brandpunten op de hor. as en de x-as en de y-as zijn symmetrieassen)
$a^2 = 4 \Rightarrow$ de toppen zijn $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.



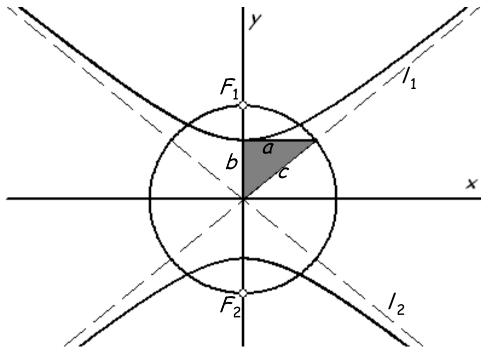


58b Zie de schets hiernaast. Gebruik de symmetrie.
(zie TABLE op de GR)

58c $m = \frac{6}{5}$ geeft k: $y = \frac{6}{5}x$.
$\begin{cases} y = \frac{6}{5}x \ ❶ \\ 3x^2 - 2y^2 = 12 \ ❷ \end{cases}$
❶ in ❷ geeft $3x^2 - 2 \cdot (\frac{6}{5}x)^2 = 12$
$3x^2 - \frac{72}{25}x^2 = 12$
$\frac{3}{25}x^2 = 12$
$x^2 = \frac{12 \cdot 25}{3} = 4 \cdot 25 = 100$
$x = -10 \Rightarrow y = \frac{6}{5} \cdot -10 = 6 \cdot -2 = -12$ en $x = 10 \Rightarrow y = \frac{6}{5} \cdot 10 = 6 \cdot 2 = 12$. De snijpunten zijn $(-10, -12)$ en $(10, 12)$.

58d $m = 2$ geeft k: $y = 2x$.
$\begin{cases} y = 2x \ ❶ \\ 3x^2 - 2y^2 = 12 \ ❷ \end{cases}$
❶ in ❷ geeft $3x^2 - 2 \cdot (2x)^2 = 12$
$3x^2 - 8x^2 = 12$
$-5x^2 = 12$
$x^2 = -\frac{12}{5}$ (er zijn geen reele oplossingen).
Dus $y = 2x$ heeft geen snijpunten met de hyperbool.

59a De toppen zijn $T_1(-a, 0)$ en $T_2(a, 0)$.
Vanuit $T_2(a, 0)$ verticaal omhoog naar de asymptoot betekent de lijn $x = a$ snijden met de asymptoot l_1: $y = \frac{b}{a}x$.
Dit geeft $y = \frac{b}{a} \cdot a = b \Rightarrow S(a, b)$. Dus $d(T_2, S) = b$.
De verticale afstand van een top tot een asymptoot is b.



59b De asymptoten van $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$.

60a Hyperbool met $a = 4$ en $b = 3$. Dus de asymptoten zijn $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$.

60b $16x^2 - 25y^2 = 400$ ofwel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a = 5$ en $b = 4$. Dus de asymptoten zijn $y = \frac{4}{5}x$ en $y = -\frac{4}{5}x$.

60c $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$ ofwel $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1 \Rightarrow a = 3$ en $b = 1$. Dus de asymptoten zijn $y = \frac{1}{3}x$ en $y = -\frac{1}{3}x$.

60d $a = 4$ en $c = 5 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$. Dus de asymptoten zijn $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$.

60e $b = 2$ en $c = 3 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$. Dus de asymptoten zijn $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x = \frac{2}{5}x\sqrt{5}$ en $y = -\frac{2}{5}x\sqrt{5}$.

61a $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$ invullen in $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ geeft $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(10, 4) ligt op de hyperbool $\Rightarrow \frac{100}{4b^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{b^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ en $a = 2 \cdot 3 = 6$.

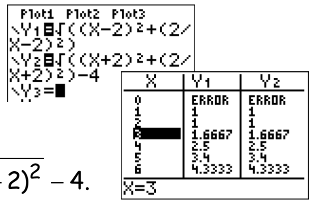
61b $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ heeft toppen $(-6, 0)$ en $(6, 0)$ en brandpunten ($c^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$) $(-3\sqrt{5}, 0)$ en $(3\sqrt{5}, 0)$.

62a De asymptoten van een hyperbool zijn $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$. Dus als $b = a$ dan zijn de asymptoten $y = x$ en $y = -x$.
Het product van de richtingscoëfficiënten van $y = x$ en $y = -x$ is $1 \cdot -1 = -1$.
Dus de asymptoten staan dan loodrecht op elkaar en is de hyperbool een orthogonale hyperbool.

62b h_1: $x^2 - y^2 = 2$ of $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ (brandpunten en toppen op de hor. as) $\Rightarrow a = b = \sqrt{2}$. Dus h_1 is een orthogonale hyperbool.
$a = b = \sqrt{2}$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow c = 2$.
De toppen zijn $(-\sqrt{2}, 0)$ en $(\sqrt{2}, 0)$ en de brandpunten zijn $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.

62c $a = 3$ en h_2 is orthogonaal $\Rightarrow a = b = 3$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
De brandpunten zijn $(-3\sqrt{2}, 0)$ en $(3\sqrt{2}, 0)$.

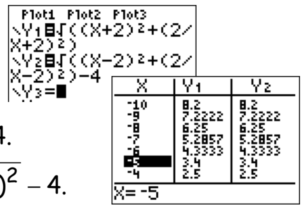
62d h_3: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ door $(4, 1) \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{15}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 15$. Nu is $c^2 = a^2 + b^2 = 15 + 15 = 30 \Rightarrow c = \sqrt{30}$.



63a $d(P, F) = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (\frac{2}{x} - 2)^2}$.

63b $M(-2, -2)$ is het middelpunt van c en de straal van cirkel c is 4.
$d(P, c) = d(P, M) - d(M, c) = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} - 4 = \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{2}{x} + 2)^2} - 4$.

63c Voer in op de GR: $y_1 = d(P, F) = \sqrt{(x-2)^2 + (\frac{2}{x} - 2)^2}$ en $y_2 = d(P, c) = \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{2}{x} + 2)^2} - 4$.
In de tabel (TABLE) op de GR zie je dat $d(P, F) = d(P, c)$ voor $x > 0$ (in het eerste kwadrant) $\Rightarrow P$ op hyperbooltak.



63d Gegeven zijn het punt $P(x, \frac{2}{x})$ op de grafiek van f (voor $x < 0$),
het punt $F(-2, -2)$ en de cirkel c_1: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$ met middelpunt $(2, 2)$.
Er geldt: $d(P, F) = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{2}{x} + 2)^2}$
en $d(P, c) = d(P, M) - d(M, c) = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} - 4 = \sqrt{(x-2)^2 + (\frac{2}{x} - 2)^2} - 4$.
Voer in op de GR: $y_1 = d(P, F) = \sqrt{(x+2)^2 + (\frac{2}{x} + 2)^2}$ en $y_2 = d(P, c) = \sqrt{(x-2)^2 + (\frac{2}{x} - 2)^2} - 4$.
In de tabel (TABLE) op de GR zie je dat $d(P, F) = d(P, c)$ voor $x < 0$ (in het derde kwadrant) $\Rightarrow P$ op hyperbooltak.

64a De hyperbool is van de vorm h_1: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (bekijk de ligging van A tussen de asymptoten) met $\frac{b}{a} = 3$ ofwel $b = 3a$.
Dus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(3a)^2} = 1$ door $A(3, 3\sqrt{5}) \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{45}{9a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{5}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ en $b = 3 \cdot 2 = 6$.
Een vergelijking van de hyperbool is h_1: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$.

64b $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. De brandpunten zijn $(-2\sqrt{10}, 0)$ en $(-2\sqrt{10}, 0)$.

64c h_2: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ met $a = b = 2\sqrt{10} \Rightarrow h_2$: $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$.

65 Deze opgave mag je overslaan (ontzettend veel werk en het gaat eigenlijk om wat je afleidt) als je maar onthoudt:
de raaklijn in een punt op de hyperbool kun je direct opschrijven met de methode van halfsubstitutie.

66a De raaklijn in $A(3,\,-1)$ is $3\cdot 3x-5\cdot -y=22$ ofwel k: $9x+5y=22$.

66b De raaklijn in $B(-7,\,-10)$ is $\frac{-7x}{14}-\frac{-10y}{40}=1$ ofwel $\frac{-x}{2}+\frac{y}{4}=1$ ofwel $-2x+y=4$.
De normaal in $B(-7,\,-10)$ is $x+2y=-7+2\cdot -10$ ofwel n: $x+2y=-27$.

67a De poollijn van $A(2,\,-2)$ t.o.v. de hyperbool is $2x-8\cdot -2y=28$ ofwel $x+8y=14$.

$\begin{cases} x+8y=14 & ❶ \\ x^2-8y^2=28 & ❷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14-8y & ❸ \\ x^2-8y^2=28 & ❷ \end{cases}$

❸ in ❷ $\Rightarrow (14-8y)^2-8y^2=28$

$196-224y+64y^2-8y^2=28$

$56y^2-224y+168=0$ (hiernaast verder)

```
14²          196
14*-8*2     -224
```

$y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$

$y=1$ in ❸ $\Rightarrow x=14-8=6$ en $y=3$ in ❸ $\Rightarrow x=14-24=-10$.

Raaklijn in $(6,1)$ is $6x-8y=28$ ofwel $3x-4y=14$.

Raaklijn in $(-10,3)$ is $-10x-24y=28$ ofwel $5x+12y=-14$.

67b De poollijn van $B(1,\,-1)$ t.o.v. de hyperbool $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ ofwel $2x^2-3y^2=24$ is $2x+3y=24$.

$\begin{cases} 2x+3y=24 & ❶ \\ 2x^2-3y^2=24 & ❷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=24-3y & ❸ \\ 4x^2-6y^2=48 & ❹ \end{cases}$

❸ in ❹ $\Rightarrow (24-3y)^2-6y^2=48$

$576-144y+9y^2-6y^2=48$

$3y^2-144y+528=0$ hiernaast verder

```
24²          576
24*-3*2     -144
```

$y^2-48y+176=0$

$(y-4)(y-44)=0$

$y=4$ in ❶ $\Rightarrow 2x+12=24 \Rightarrow x=6$ en

$y=44$ in ❶ $\Rightarrow 2x+132=24 \Rightarrow x=-54$.

Raaklijn in $(6,4)$ is $12x-12y=24$ ofwel $x-y=2$.

Raaklijn in $(-54,44)$ is $-108x-132y=24$ ofwel $9x+11y=-2$.

68a De raaklijn in (raakpunt) $A(x_A,y_A)$ aan de hyperbool is (met halfsubstitutie) $x_A\cdot x-a^2y_A\cdot y=-80$.
Deze raaklijn valt samen met k: $x+y=10 \Rightarrow \frac{x_A}{1}=\frac{-a^2y_A}{1}=\frac{-80}{10}=-8$.
Uit $\frac{x_A}{1}=-8$ volgt $x_A=-8$ en $-8+y_A=10 \Rightarrow y_A=18$.
Uit $\frac{-a^2y_A}{1}=-8$ en $y_A=18$ volgt $-a^2\cdot 18=-8 \Rightarrow a^2=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

68b De raaklijn in (raakpunt) $B(x_B,y_B)$ aan de hyperbool is (met halfsubstitutie) $b^2x_B\cdot x-8y_B\cdot y=100$.
Deze raaklijn valt samen met k: $3x-4y=10 \Rightarrow \frac{b^2x_B}{3}=\frac{-8y_B}{4}=\frac{100}{10}=10$.
Uit $\frac{-8y_B}{4}=10$ volgt $-2y_B=10 \Rightarrow y_B=5$ en $3x_B-20=10 \Rightarrow x_B=10$.
Uit $\frac{b^2x_B}{3}=10$ en $x_B=10$ volgt $b^2\cdot 10=30 \Rightarrow b^2=3$.

69a De raaklijnen k en l hebben een vergelijking van de vorm en $y=x+b$ ($rc=1$) ofwel $x-y=-b$.
Noem het raakpunt is $A(x_A,y_A)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $x_A\cdot x-3y_A\cdot y=24$.
Deze raaklijn valt samen met $x-y=-b \Rightarrow \frac{x_A}{1}=\frac{3y_A}{1}=\frac{24}{-b}$. Uit $\frac{x_A}{1}=\frac{3y_A}{1}$ volgt $x_A=3y_A$.
Dus voor het punt A geldt $x=3y$ ❶ en $x^2-3y^2=24$ ❷
❶ in ❷ $\Rightarrow (3y)^2-3y^2=24 \Rightarrow 9y^2-3y^2=24 \Rightarrow 6y^2=24 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$.
$y=-2$ in ❶ $\Rightarrow x=-6$ en $y=2$ in ❶ $\Rightarrow x=6$. Dus de raakpunten zijn $(-6,\,-2)$ en $(6,2)$.

69b De raaklijnen ($rc=\frac{3}{5}$) hebben een vergelijking van de vorm en $y=\frac{3}{5}x+b$ ofwel $3x-5y=-5b$.
Noem het raakpunt is $B(x_B,y_B)$. Dit geeft (met halfsubstitutie) raaklijn $x_B\cdot x-3y_B\cdot y=24$.
Deze raaklijn valt samen met $3x-5y=-b \Rightarrow \frac{x_B}{3}=\frac{3y_B}{5}=\frac{24}{-5b}$. Uit $\frac{x_B}{3}=\frac{3y_B}{5}$ volgt $x_B=\frac{9y_B}{5}$.
Dus voor het punt B geldt: $x_B=\frac{9y_B}{5}$ ❶ en $x^2-3y^2=24$ ❷
❶ in ❷ $\Rightarrow (\frac{9y_B}{5})^2-3y^2=24 \Rightarrow \frac{81}{25}y^2-3y^2=24 \Rightarrow \frac{6}{25}y^2=24 \Rightarrow \frac{1}{25}y^2=4 \Rightarrow y^2=100 \Rightarrow y=\pm 10$.
$y=-10$ in ❶ $\Rightarrow x=-18$ en $y=10$ in ❶ $\Rightarrow x=18$. Dus de punten zijn $(-18,\,-10)$ en $(18,10)$.

70a $3x^2-y^2=71$ ofwel $\frac{x^2}{\frac{71}{3}}-\frac{y^2}{71}=1$. Dus $a^2=\frac{71}{3}$, $b^2=71$ en $c^2=a^2+b^2=\frac{71}{3}+71=\frac{1}{3}\cdot 71+1\cdot 71=\frac{4}{3}\cdot 71$.
$a=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 71}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot 71}=\frac{1}{3}\sqrt{213}$ en $c=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot 71}=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot 71}=\frac{2}{3}\sqrt{213}$.
De toppen zijn $(-\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$ en $(\frac{1}{3}\sqrt{213},0)$ en de brandpunten zijn $(-\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$ en $(\frac{2}{3}\sqrt{213},0)$.

70b De asymptoten zijn $y=\frac{b}{a}x$ en $y=-\frac{b}{a}x$, dus $y=\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{\frac{71}{3}}}x=\frac{\sqrt{71}}{\frac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}}}x=x\sqrt{3}$ en $y=-x\sqrt{3}$.

70c De raaklijn in $A(5,\ -2)$ (met halfsubstitutie) k: $3\cdot 5x - -2y = 71$ ofwel k: $15x + 2y = 71$.

70d De raaklijn in $B(12, 19)$ (met halfsubstitutie) m: $3\cdot 12x - 19y = 71$ ofwel m: $36x - 19y = 71$.
Dus de normaal in $B(12, 19)$ n: $19x + 36y = 19\cdot 12 + 36\cdot 19$ ofwel k: $19x + 36y = 912$.

```
19*12+36*19
            912
```

70e De raaklijnen p en q hebben een vergelijking van de vorm en $y = 2x + b$ ($rc = 2$) ofwel $2x - y = -b$.
Noem het raakpunt is $C(x_C, y_C)$. Dit geeft raaklijn (met halfsubstitutie) $3x_C\cdot x - y_C\cdot y = 71$.
Deze raaklijn valt samen met $2x - y = -b \Rightarrow \frac{3x_C}{2} = \frac{y_C}{1} = \frac{71}{-b}$. Uit $\frac{3x_C}{2} = \frac{y_C}{1}$ volgt $2y_C = 3x_C \Rightarrow y_C = \frac{3}{2}x_C$.
Dus voor het punt C geldt $y = \frac{3}{2}x$ ❶ en $3x^2 - y^2 = 71$ ❷
❶ in ❷ $\Rightarrow 3x^2 - (\frac{3}{2}x)^2 = 71 \Rightarrow 3x^2 - \frac{9}{4}x^2 = 71 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 71 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}\cdot 71 = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot 71 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{213}$.

71 De poollijn van $P(1,\ \frac{1}{5})$ t.o.v. de hyperbool is $x - 2y = c$ (gegeven) en (met halfsubstitutie) $1\cdot x - a^2\cdot\frac{1}{5}y = 6$.
Deze lijnen zijn dezelfde als $\frac{1}{1} = \frac{2}{\frac{1}{5}a^2} = \frac{c}{6}$. Uit $\frac{1}{1} = \frac{2}{\frac{1}{5}a^2}$ volgt $\frac{1}{5}a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 10$ en uit $\frac{1}{1} = \frac{c}{6}$ volgt $c = 6$.
Dus voor de snijpunten van de poollijn met de hyperbool geldt $x = 2y + 6$ ❶ en $x^2 - 10y^2 = 6$ ❷
❶ in ❷ $\Rightarrow (2y+6)^2 - 10y^2 = 6 \Rightarrow 4y^2 + 24y + 36 - 10y^2 = 6 \Rightarrow -6y^2 + 24y + 30 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$.
Dus $(y-5)(y+1) = 0 \Rightarrow y = 5$ in ❶ $\Rightarrow x = 2\cdot 5 + 6 = 16$ en $y = -1$ in ❶ $\Rightarrow x = 2\cdot -1 + 6 = 4$.
De snijpunten van de poollijn met de hyperbool zijn $(16, 5)$ en $(4,\ -1)$.

72a
$4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$
$4x^2 + 8x - y^2 + 4y - 15 = 0$
$4\left(x^2 + 2x\right) - \left(y^2 - 4y\right) - 15 = 0$
$4\left((x+1)^2 - 1\right) - \left((y-2)^2 - 4\right) - 15 = 0$
$4(x+1)^2 - 4 - (y-2)^2 + 4 - 15 = 0$
$4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$
$\frac{4(x+1)^2}{15} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1.$

$a^2 = \frac{15}{4},\ b^2 = 15,\ c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}\cdot 15 = \frac{1}{4}\cdot 5\cdot 5\cdot 3$.
Het middelpunt van de hyperbool is $(-1, 2)$.
De toppen zijn $(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{15}, 2)$ en $(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{15}, 2)$.
De brandpunten zijn $(-1 - \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2)$ en $(-1 + \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2)$.

72b De asymptoten (door het middelpunt van de hyperbool) zijn $y - 2 = \frac{b}{a}(x+1)$ en $y - 2 = -\frac{b}{a}(x+1)$,
dus $y - 2 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}(x+1) = \frac{\sqrt{15}}{\frac{1}{2}\sqrt{15}}(x+1) = 2(x+1)$ en $y - 2 = -2(x+1)$ ofwel $y = 2x + 4$ en $y = -2x$.

72c Een vergelijking van de raaklijn in $A(3, 9)$ (met halfsubstitutie) is
k: $4(3+1)(x+1) - (9-2)(y-2) = 15$ ofwel k: $16x + 16 - 7y + 14 = 15$ ofwel $16x - 7y = -15$.

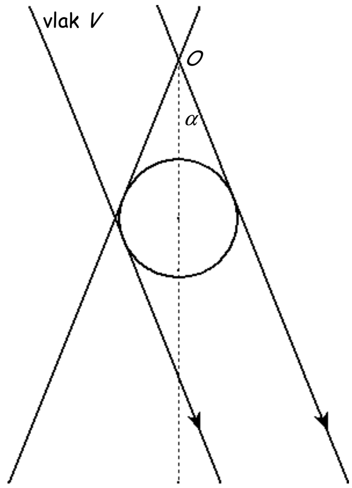
73 De doorsnede heeft dan de vorm van een cirkel.

74a PF_1 ligt in V en V raakt de grote bol in $F_1 \Rightarrow$ de lijn door P en F_1 raakt de grote bol in F_1.
De lijn door O en P raakt de grote bol in A. PF_1 en PA zijn raaklijnstukken aan de grote bol.
Raaklijnstukken vanuit een punt buiten een bol aan een bol zijn even lang $\Rightarrow PF_1 = PA$.
Evenzo is te beredeneren dat $PF_2 = PB$.

74b $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \Rightarrow PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB.$
Bij een gegeven kegel en een gegeven (snij)vlak V liggen de bollen van Dandelin vast en daarmee ook de punten A en B, dus AB is constant. Dus $PF_1 + PF_2 =$ constant en daarmee wordt voldaan aan de definitie van een ellips zoals die op bladzijde 103 in theorie A gegeven is. Dus P ligt op een ellips.

75a PF_1 ligt in V en V raakt de grote bol in $F_1 \Rightarrow$ de lijn door P en F_1 raakt de grote bol in F_1.
De lijn door O en P raakt de grote bol in A. PF_1 en PA zijn raaklijnstukken aan de grote bol.
Raaklijnstukken vanuit een punt buiten een bol aan een bol zijn even lang $\Rightarrow PF_1 = PA$.
Evenzo is te beredeneren dat $PF_2 = PB$.

75b $\left.\begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array}\right\} \Rightarrow PF_2 - PF_1 = PB - PA = AB.$
Bij een gegeven kegel en een gegeven (snij)vlak V liggen de bollen van Dandelin vast en daarmee ook de punten A en B, dus AB is constant. Dus $PF_2 - PF_1 =$ constant en daarmee wordt voldaan aan de definitie van een hyperbool zoals die op bladzijde 116 in theorie A gegeven is. Dus P ligt op een hyperbool.



76a Een bol van Dandelin moet aan de kegel raken en aan het vlak V.
In een doorsnede door de as van de kegel en loodrecht op het vlak V moet er dus een cirkel raken aan twee lijnen door de top van het kegelvlak.
Zie de figuur hiernaast. Dit kan slechts met één cirkel.
Er is dan ook slechts één bol van Dandelin.

76b $\angle(V, \text{as}) = \alpha$ (gegeven) $\Rightarrow \angle(V,\ W) = 90° - \alpha$ (zie figuur 11.24).

76c PF en PA zijn raaklijnstukken vanuit P aan de bol (zie figuur 11.24) $\Rightarrow PF = PA$.

76d $\angle(PA, \text{as}) = \alpha$ (halve tophoek) $\Rightarrow \angle(PA,\ W) = 90° - \alpha$.

76e $\left.\begin{array}{l}\angle(V,\ W) = \angle(PB,\ W) = 90° - \alpha \\ \angle(PA,\ W) = 90° - \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \angle(PA,\ W) = \angle(PB,\ W).$
Dus ΔPAB is een gelijkbenige driehoek $\Rightarrow PA = PB$.
$\left.\begin{array}{l}PB = d(P, s) \\ d(P, F) = PA \\ PA = PB\end{array}\right\} \Rightarrow d(P, s) = d(P, F) \Rightarrow P$ op de parabool met brandpunt F en richtlijn s.

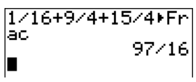
77 I: een parabool door het ontbreken van een term met x^2.
II: een cirkel door de gelijke coëfficiënten van (getallen vóór) x^2 en y^2.
III: een ellips door de gelijke tekens van de coëfficiënten van x^2 en y^2 (beide met een $+$ teken).
IV: een hyperbool door de verschillende tekens van de coëfficiënten van x^2 en y^2 (één met $+$ teken en één met $-$ teken).

78a $y^2 - 6x + 8y + 28 = 0$ is een parabool
$2p = 6 \Rightarrow \frac{1}{2}p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
$(y+4)^2 - 16 - 6x + 28 = 0$
$(y+4)^2 = 6x - 12$
$(y+4)^2 = 6(x-2)$. De top is $(2,\ -4)$; het brandpunt is $F(2+\frac{3}{2},\ -4) = F(3\frac{1}{2},\ -4)$ en de richtlijn $x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

78b $x^2 + 9y^2 + 2x - 8 = 0$ is een ellips
$(x+1)^2 - 1 + 9y^2 - 8 = 0$
$(x+1)^2 + 9y^2 = 9$
$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$
$a = 3,\ b = 1$ en $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Het middelpunt van de ellips is $(-1, 0)$.
De toppen zijn $(-4, 0)$; $(2, 0)$; $(-1,\ -1)$ en $(-1, 1)$.
De brandpunten zijn $(-1-2\sqrt{2}, 0)$ en $(-1+2\sqrt{2}, 0)$.

78c $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$ is een hyperbool
$(x+2)^2 - 4 - 9y^2 - 5 = 0$
$(x+2)^2 - 9y^2 = 9$
$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1.$
$a = 3,\ b = 1$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$.
Het middelpunt van de hyperbool is $(-2, 0)$.
De toppen zijn $(-5, 0)$ en $(1, 0)$.
De brandpunten zijn $(-2-\sqrt{10}, 0)$ en $(-2+\sqrt{10}, 0)$.
De asymptoten zijn $y = \frac{1}{3}(x+2)$ en $y = -\frac{1}{3}(x+2)$.

79a $4x^2 + 4y^2 + 2x - 12y - 15 = 0$ is een cirkel
$x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - 3y - \frac{15}{4} = 0$
$(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + (y-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{15}{4} = 0$



$(x+\frac{1}{4})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{97}{16}$. Het middelpunt is $(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{2})$ en de straal is $\sqrt{\frac{97}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{97}$.

79b $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ is een ellips
$4\left(x^2 - 2x\right) + y^2 + 8y + 16 = 0$
$4\left((x-1)^2 - 1\right) + (y+4)^2 - 16 + 16 = 0$
$4(x-1)^2 - 4 + (y+4)^2 = 0$
$4(x-1)^2 + (y+4)^2 = 4$
$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1.$
$a = 1,\ b = 2$ en $c^2 = b^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.
Het middelpunt van de ellips is $(1,\ -4)$.
De toppen zijn $(0,\ -4)$; $(2,\ -4)$; $(1,\ -6)$ en $(1,\ -2)$.
De brandpunten zijn $(1,\ -4-\sqrt{3})$ en $(1,\ -4+\sqrt{3})$.

79c $x^2 - y^2 + 4x + 8y - 20 = 0$ is een (orthogonale) hyperbool
$x^2 + 4x - y^2 + 8y - 20 = 0$
$(x+2)^2 - 4 - (y^2 - 8y) - 20 = 0$
$(x+2)^2 - 4 - ((y-4)^2 - 16) - 20 = 0$
$(x+2)^2 - 4 - (y-4)^2 + 16 - 20 = 0$
$(x+2)^2 - (y-4)^2 = 8$
$\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{(y-4)^2}{8} = 1.\ \ c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16 \Rightarrow c = 4$
Het middelpunt is $(-2, 4)$.
De toppen zijn $(-2-2\sqrt{2}, 4)$ en $(-2+2\sqrt{2}, 4)$.
De brandpunten zijn $(-6, 4)$ en $(2, 4)$.
De asymptoten zijn $y - 4 = x + 2$ en $y - 4 = -(x+2)$.

Diagnostische toets

D1a $\frac{1}{2}p = 8 \Rightarrow p = 16$ (met de opening naar rechts). Dus de parabool $y^2 = 32x$.

D1b $\frac{1}{2}p = 6 - 10 = -4 \Rightarrow p = -8$ (met de opening naar links). Dus de parabool $y^2 = -16(x - 10)$.

D1c $p = 4 - -6 = 10$ en de top is $(-1, 2)$ (met de opening naar rechts). Dus de parabool $(y-2)^2 = 20(x+1)$.

D1d $\frac{1}{2}p = 3 - 4 = -1 \Rightarrow p = -2$ (met de opening naar beneden). Dus de parabool $(x-8)^2 = -4(y-3)$.

D2a $y^2 - 10y = 2x + 1$
$(y-5)^2 - 25 = 2x + 1$
$(y-5)^2 = 2x + 26$
$(y-5)^2 = 2(x+13)$. hiernaast verder

$y^2 = 2x \xrightarrow{\text{Tr. }(-13,5)} (y-5)^2 = 2(x+13)$.

$y^2 = 2x$	$(y-5)^2 = 2(x+13)$
de top $(0, 0)$	de top $(-13, 5)$
het brandpunt $(\frac{1}{2}, 0)$	het brandpunt $(-12\frac{1}{2}, 5)$
de richtlijn $x = -\frac{1}{2}$	de richtlijn $x = -13\frac{1}{2}$
de as $y = 0$ (de x-as)	de as $y = 5$

D2b $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$
$\frac{1}{8}x^2 + 2x = y + 4$
$x^2 + 16x = 8y + 32$
$(x+8)^2 - 64 = 8y + 32$
$(x+8)^2 = 8y + 96$
$(x+8)^2 = 8(y+12)$. hiernaast verder

$x^2 = 8y \xrightarrow{\text{Tr. }(-8,-12)} (x+8)^2 = 8(y+12)$.

$x^2 = 8y$	$(x+8)^2 = 8(y+12)$
de top $(0, 0)$	de top $(-8, -12)$
het brandpunt $(0, 2)$	het brandpunt $(-8, -10)$
de richtlijn $y = -2$	de richtlijn $y = -14$
de as $x = 0$ (de y-as)	de as $x = -8$

D3a $a = -1\frac{1}{2}$ en $2p = -6 \Rightarrow p = -3$ geeft k: $y = -1\frac{1}{2}x + \frac{-3}{2 \cdot -1\frac{1}{2}} \Rightarrow y = -1\frac{1}{2}x + \frac{-3}{-3}$. Dus k: $y = -1\frac{1}{2}x + 1$.

D3b Raaklijn l in $A(-1\frac{1}{2}, 3)$: $3y = -3x - 3 \cdot -1\frac{1}{2}$ (delen door 3) $\Rightarrow y = -x + 1\frac{1}{2}$. Dus l: $x + y = 1\frac{1}{2}$.

D3c De raaklijn in $B(-6, 6)$: $6y = -3x - 3 \cdot -6$ (delen door 3) $\Rightarrow 2y = -x + 6 \Rightarrow x + 2y = 6$.
Dus de normaal n: $2x - y = c$ door $B(-6, 6) \Rightarrow -12 - 6 = c \Rightarrow -18 = c$. Dus n: $2x - y = -18$.

D3d De poollijn van $P(2, -2)$ t.o.v. $y^2 = -6x$ ❶ ($y \cdot y = -3x - 3x$) is $-2y = -3x - 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$ ❷.
De poollijn snijden met de parabool geeft de raakpunten. ❷ in ❶ geeft dan:
$(\frac{3}{2}x + 3)^2 = -6x \Rightarrow \frac{9}{4}x^2 + 9x + 9 = -6x \Rightarrow \frac{9}{4}x^2 + 15x + 9 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 60x + 36 = 0 \Rightarrow$
$3x^2 + 20x + 12 = 0$ met $D = 20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow \sqrt{D} = 16$.
$x = \frac{-20-16}{6} = \frac{-36}{6} = -6$ in ❷ geeft $y = -6 \Rightarrow m_1$: $-6y = -3x + 18$ ofwel m_1: $y = \frac{1}{2}x - 3$.
$x = \frac{-20+16}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ in ❷ geeft $y = 2 \Rightarrow m_2$: $2y = -3x - 2$ ofwel m_2: $y = -1\frac{1}{2}x - 1$.

D4a Ellips met $a = 3$ en $b = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

D4b Ellips met middelpunt $(4, 3) \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}(4, 2) \text{ is een top en } (4, 3) \text{ het middelpunt} \Rightarrow b = |2 - 3| = 1 \\ (6, 3) \text{ is een top en } (4, 3) \text{ het middelpunt} \Rightarrow a = |6 - 3| = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ellips } \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1.$$

D4c $(6, 2)$ en $(10, 2)$ zijn toppen, dus $(8, 2)$ is het middelpunt $\Rightarrow \frac{(x-8)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}2a = 10 - 6 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ c = 8 - 7 = 1 \text{ en} \\ c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ellips } \frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1.$$

D4d $(-1, 2)$ en $(-1, 10)$ zijn de brandpunten, dus $(-1, 6)$ is het middelpunt $\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{b^2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}2c = 10 - 2 = 8 \Rightarrow c = 4 \\ c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow 16 = b^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + 16\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ellips } \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{a^2+16} = 1.$$

$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{a^2+16} = 1$ door $(0, 6 + \sqrt{15})$
$\frac{1^2}{a^2} + \frac{\sqrt{15}^2}{a^2+16} = 1$
$\frac{1}{a^2} + \frac{15}{a^2+16} = 1$
$a^2 + 16 + 15a^2 = a^2(a^2 + 16)$

$16a^2 + 16 = a^4 + 16a^2$
$a^4 = 16$
$a^2 = -4$ (voldoet niet) $\vee$ $a^2 = 4$ (voldoet)
Dus de ellips is $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{20} = 1$.

D5 $x^2+y^2-4x+2y-11=0$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=16$. Dit is de cirkel met $M(2,\ -1)$ en $r=4$. Verder is $d(M,F)=\sqrt{(2-2)^2+(1--1)^2}=\sqrt{4}=2$.

Omdat $d(M,F)<4$ ligt F binnen de cirkel en is de conflictlijn een ellips met brandpunten $M(2,\ -1)$ en $F(2,1)$.

Dus het punt $(2,0)$ (midden tussen de brandpunten) is het middelpunt van de ellips $\Rightarrow$ ellips: $\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=r$ én $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b \Rightarrow r=2b=4 \Rightarrow b=2$.

$b=2,\ c=1$ en $c^2=b^2-a^2$ (de verticale as waar de brandpunten op liggen is de lange as) $\Rightarrow a^2=b^2-c^2=2^2-1^2=3$.

Dus een vergelijking van de conflictlijn (de ellips) is $\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$.

D6a $4x^2+9y^2+32x-18y-71=0$

$4(x^2+8x)+9(y^2-2y)=71$

$4\left((x+4)^2-16\right)+9\left((y-1)^2-1\right)=71$

$4(x+4)^2-64+9(y-1)^2-9=71$

$4(x+4)^2+9(y-1)^2=144$

$\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{16}=1.$

```
144/4          36
144/9          16
```

Ellips met middelpunt $(-4,1)$; $a^2=36$ en $b^2=16$.

Dus $c^2=a^2-b^2=36-16=20 \Rightarrow c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

De toppen zijn $(-10,1)$; $(2,1)$; $(-4,\ -3)$ en $(-4,5)$.

De brandpunten zijn $(-4-2\sqrt{5},1)$ en $(-4+2\sqrt{5},1)$.

D6b $6(x+3)^2+(y-2)^2=30$

$\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{30}=1.$

Ellips met middelpunt $(-3,2)$; $a^2=5$ en $b^2=30$.

Dus $c^2=b^2-a^2=30-5=25 \Rightarrow c=5$.

Toppen: $(-3-\sqrt{5},2)$; $(-3+\sqrt{5},2)$; $(-3,2-\sqrt{30})$ en $(-3,2+\sqrt{30})$.

Brandpunten: $(-3,\ -3)$ en $(-3,7)$.

D7a De raaklijn in $A(6,\ -1)$ is (met halfsubstitutie) k: $6x-10y=46$ ofwel k: $3x-5y=23$.

D7b De raaklijn in $B(2,3)$ is (met halfsubstitutie) m: $8x+36y=124$ ofwel m: $2x+9y=31$.

Dus de normaal in $B(2,3)$ is n: $9x-2y=9\cdot 2-2\cdot 3$ ofwel n: $9x-2y=12$.

```
25*17.4       435
Ans/3         145
5625/3       1875
```

D7c De poollijn van $P(17\frac{2}{5},\ -3)$ t.o.v. de ellips (met halfsubst.) is p: $25\cdot 17\frac{2}{5}x-27y=5625$ ofwel p: $145x-9y=1875$.

$\begin{cases}145x-9y=1875 ❶\\ 25x^2+9y^2=5625 ❷\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9y=145x-1875 ❸\\ 225x^2+(9y)^2=9\cdot 5625 ❷\end{cases}$

❸ in❷ $\Rightarrow 225x^2+(145x-1875)^2=50625$

$225x^2+21025x^2-543750x+3515625=50625$

$21250x^2-543750x+3465000=0$

$17x^2-435x+2772=0$

$D=(-435)^2-4\cdot 17\cdot 2772=729 \Rightarrow \sqrt{D}=27$

$x=\frac{435-27}{2\cdot 17}=\frac{408}{34}=12$ in❸ $\Rightarrow y=-15$.

$x=\frac{435+27}{2\cdot 17}=\frac{462}{34}=\frac{231}{17}$ in❸ $\Rightarrow y=\frac{180}{17}$.

```
9*5625               50625

145²                 21025
145*-1875*2        -543750
1875²              3515625

3515625-50625      3465000

21250/250               85
543750/250            2175
3465000/250          13860

85/5                    17
2175/5                 435
13860/5               2772

435²-4*17*2772         729
√(729)                  27

(435-27)/34▸Frac        12
(145Ans-1875)/9▸Frac   -15

(435+27)/34▸Frac    231/17
(145Ans-1875)/9▸Frac 180/17

300/15                  20
135/15                   9
5625/15                375

5625*17/15            6375
25*231/15              385
9*180/15               108
```

De raaklijn in $(12,\ -15)$ is (met halfsubstitutie) $300x-135y=5625$ ofwel $20x-9y=375$.

De raaklijn in $(\frac{231}{17},\ \frac{180}{17})$ is (met halfsubstitutie) $\frac{25\cdot 231}{17}x-\frac{9\cdot 180}{17}y=5625$ ofwel $385x-108y=6375$.

D7d De raaklijn in $A(x_A,y_A)$ is (met halfsubstitutie) $3x_A\cdot x+5y_A\cdot y=32$.

De raaklijn is ook van de vorm $y=-\frac{3}{5}x+b$ ofwel $3x+5y=5b$. Dus $\frac{3x_A}{3}=\frac{5y_A}{5}=\frac{32}{5b}$.

Uit $\frac{3x_A}{3}=\frac{5y_A}{5}$ volgt $15x_A=15y_A \Rightarrow x_A=y_A$. Dus $\begin{cases}x=y ❶\\ 3x^2+5y^2=32 ❷\end{cases}$

❶ in❷ $\Rightarrow 3y^2+5y^2=32 \Rightarrow 8y^2=32 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$.

$y=-2$ in❶ $\Rightarrow x=-2$ en $y=2$ in❶ $\Rightarrow x=2$. Dus de raakpunten zijn $(-2,-2)$ en $(2,2)$.

De raaklijn in $(-2,\ -2)$ is (met halfsubstitutie) $-6x-10y=32$ ofwel $3x+5y=-16$.

De raaklijn in $(2,2)$ is (met halfsubstitutie) $6x+10y=32$ ofwel $3x+5y=16$.

D8a $a=5,\ c=6$ en $b^2=c^2-a^2=36-25=11 \Rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$ ofwel $11x^2-25y^2=275$.

ofwel
$12x^2-45y^2=108$

D8b $a=1,\ c=3$ en $b^2=c^2-a^2=9-1=8 \Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$ ofwel $8x^2-y^2=8$.

D8c $a=3$ door $(12,6) \Rightarrow \frac{12^2}{3^2}-\frac{6^2}{b^2}=1 \Rightarrow 4\cdot 4-\frac{36}{b^2}=1 \Rightarrow 15=\frac{36}{b^2} \Rightarrow b^2=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2{,}4$. Dus $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2{,}4}=1$ ofwel $\frac{x^2}{9}-\frac{5y^2}{12}=1$.

D9a $A(10, 1)$ voldoet aan $px^2 - qy^2 = 160 \Rightarrow p \cdot 10^2 - q \cdot 1^2 = 160 \Rightarrow 100p - q = 160$ ❶
$B(20, -4)$ voldoet aan $px^2 - qy^2 = 160 \Rightarrow p \cdot 400 - q \cdot 16 = 160 \Rightarrow 25p - q = 10$ ofwel $q = 25p - 10$ ❷
❷ in ❶ $\Rightarrow 100p - (25p - 10) = 160 \Rightarrow 100p - 25p + 10 = 160 \Rightarrow 75p = 150 \Rightarrow p = 2$ in ❷ $\Rightarrow q = 25 \cdot 2 - 10 = 40$.

D9b $p = 2$ en $q = 40$ geeft hyperbool $2x^2 - 40y^2 = 160$ ofwel $x^2 - 20y^2 = 80$ ofwel $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{4} = 1$.
$a^2 = 80$, $b^2 = 4$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 80 + 4 = 84$. Dus $a = \sqrt{80} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ en $c = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$.
De toppen zijn $(-4\sqrt{5}, 0)$ en $(4\sqrt{5}, 0)$. De brandpunten zijn $(-2\sqrt{21}, 0)$ en $(2\sqrt{21}, 0)$.

D9c $x = 2y - 72$ ❶ invullen in $x^2 - 20y^2 = 80$ geeft
$(2y - 72)^2 - 20y^2 = 80$
$4y^2 - 288y + 72^2 - 20y^2 = 80$
$-16y^2 - 288y + 5104 = 0$
$y^2 + 18y - 319 = 0$ met $D = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot -319 = 1600$ hiernaast verder

```
2*72*2          288
72²-80         5104
```

```
288/16           18
5104/16         319
18²-4*1*-319
               1600
```

$y = \frac{-18 - 40}{2} = \frac{-58}{2} = -29 \lor y = \frac{-18 + 40}{2} = \frac{22}{2} = 11$.
$y = -29$ in ❶ $\Rightarrow x = 2 \cdot -29 - 72 = -130$ en
$y = 11$ in ❶ $\Rightarrow x = 2 \cdot 11 - 72 = -50$.
De snijpunten zijn $(-29, -130)$ en $(-50, 11)$.

D10a $4x^2 - 9y^2 = 36$ ofwel $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$ en $b = \sqrt{4} = 2$. De asymptoten zijn $y = \frac{2}{3}x$ en $y = -\frac{2}{3}x$.

D10b Toppen $(0, -4)$ en $(0, -4) \Rightarrow b = 4$. Verder is $c = 5$ en $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$.
De asymptoten zijn $y = \frac{4}{3}x$ en $y = -\frac{4}{3}x$.

D11a De raaklijn in $A(3, -1)$ aan de hyperbool (met halfsubstitutie) is k: $9 \cdot 3x - 10 \cdot -1y = 71$ ofwel $27x + 10y = 71$.

D11b De raaklijn in $B(12, 3)$ aan de hyperbool (met halfsubstitutie) is m: $12x - 12 \cdot 3y = 36$ ofwel $x - 3y = 3$.
Dus de normaal in $B(12, 3)$ aan de hyperbool is n: $3x + y = 3 \cdot 12 + 3$ dus n: $3x + y = 39$.

D11c De poollijn van $P(4, -2)$ t.o.v. de hyperbool (met halfsubstitutie) is $4x - 32 \cdot -2y = 112$ ofwel $x + 16y = 28$.
De raakpunten op de hyperbool zijn de snijpunten van de poollijn met de hyperbool.
$x = -16y + 28$ ❶ in vullen in $x^2 - 32y^2 = 112$ geeft
$(-16y + 28)^2 - 32y^2 = 112$
$256y^2 - 2 \cdot 16 \cdot 28y + 28^2 - 32y^2 = 112$
$224y^2 - 869y + 672 = 0$
$y^2 - 4y + 3 = 0$
$(y - 3)(y - 1) = 0$ hiernaast verder

$y = 3$ in ❶ geeft $x = -48 + 28 = -20$ en
$y = 1$ in ❶ geeft $x = -16 + 28 = 12$.
De raaklijn in $(-20, 3)$ (met halfsubstitutie) is
$-20x - 32 \cdot 3y = 112$ ofwel $5x + 24y = -28$.
De raaklijn in $(12, 1)$ (met halfsubstitutie) is
$12x - 32 \cdot 1y = 112$ ofwel $3x - 8y = 28$.

D11d De raaklijnen hebben een vergelijking van de vorm en $y = -3\frac{3}{5}x + b$ ($rc = 3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$) ofwel $18x + 5y = 5b$.
Noem het raakpunt is $C(x_C, y_C)$. Dit geeft raaklijn (met halfsubstitutie) $12x_C \cdot x - 5y_C \cdot y = 88$.
Deze raaklijnen vallen samen als $\frac{12x_C}{18} = \frac{-5y_C}{5} = \frac{88}{5b}$. Uit $\frac{12x_C}{18} = \frac{-5y_C}{5}$ volgt $-18y_C = 12x_C \Rightarrow y_C = -\frac{2}{3}x_C$.
Dus voor het punt C geldt $y = -\frac{2}{3}x$ ❶ en $12x^2 - 5y^2 = 88$ ❷
❶ in ❷ $\Rightarrow 12x^2 - 5(-\frac{2}{3}x)^2 = 88 \Rightarrow 12x^2 - \frac{20}{9}x^2 = 88 \Rightarrow \frac{88}{9}x^2 = 88 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{88} \cdot 88 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
$x = 3$ in ❷ $\Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2$ en de raaklijn in $(3, -2)$ (met halfsubstitutie) is $36x + 10y = 88$ ofwel $18x + 5y = 44$.
$x = -3$ in ❷ $\Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot -3 = 2$ en de raaklijn in $(3, 2)$ (met halfsubstitutie) is $-36x - 10y = 88$ ofwel $18x + 5y = -44$.

D12a $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ is een cirkel
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 4 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Het middelpunt is $(-2, -1)$ en de straal is 1.

D12b $x^2 + 8x + 12y = 0$ is een parabool
$(x + 4)^2 - 16 + 12y = 0$
$(x + 4)^2 = -12(y - \frac{4}{3})$. De top is $(-4, \frac{4}{3})$; het brandpunt is $F(-4, \frac{4}{3} - 3) = F(-4, -\frac{5}{3})$ en de richtlijn $y = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$.

$2p = -12 \Rightarrow \frac{1}{2}p = -3$

D12c $16x^2 - 9y^2 + 32x - 128 = 0$ is een hyperbool
$16\left(x^2 + 2x\right) - 9y^2 - 128 = 0$
$16\left((x + 1)^2 - 1\right) - 9y^2 - 128 = 0$
$16(x + 1)^2 - 16 - 9y^2 - 128 = 0$
$16(x + 1)^2 - 9y^2 = 144$
$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

$a = 3$, $b = 4$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$.
Het middelpunt van de hyperbool is $(-1, 0)$.
De toppen zijn $(-4, 0)$ en $(2, 0)$.
De brandpunten zijn $(-6, 0)$ en $(4, 0)$.
De asymptoten zijn $y = \frac{4}{3}(x + 1)$ en $y = -\frac{4}{3}(x + 1)$.

D12d $3x^2+5y^2-30x+10y+50=0$ is een ellips
$3\left(x^2-10x\right)+5\left(y^2+2y\right)+50=0$
$3\left((x-5)^2-25\right)+5\left((y+1)^2-1\right)+50=0$
$3(x-5)^2-75+5(y+1)^2-5+50=0$
$3(x-5)^2+5(y+1)^2=30$
$\frac{(x-5)^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{6}=1.$

$a=\sqrt{10},\ b=\sqrt{6}$ en $c^2=a^2-b^2=10-6=4 \Rightarrow c=2.$
Het middelpunt van de ellips is $(5,\ -1)$.
De toppen zijn $(5-\sqrt{10},\ -1)$; $(5+\sqrt{10},\ -1)$; $(5,\ -1-\sqrt{6})$ en $(5,\ -1+\sqrt{6})$.
De brandpunten zijn $(3,\ -1)$ en $(7,\ -1)$.

Gemengde opgaven 11. Kegelsneden

G22a $x^2+ax=ay-a^2$
$(x+\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2=ay-a^2$
$(x+\frac{1}{2}a)^2=ay-\frac{3}{4}a^2$
$(x+\frac{1}{2}a)^2=a(y-\frac{3}{4}a)$.
$2p=a \Rightarrow \frac{1}{2}p=\frac{1}{4}a$
De top is $(-\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{4}a)$,
het brandpunt is $F(-\frac{1}{2}a,\ a)$
en de richtlijn $y=\frac{1}{2}a$.

G22b $(-\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{4}a)$ op $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ ofwel op $3x^2+4y^2=24$
$3\cdot(-\frac{1}{2}a)^2+4\cdot(\frac{3}{4}a)^2=24$
$3\cdot\frac{1}{4}a^2+4\cdot\frac{9}{16}a^2=24$
$\frac{3}{4}a^2+\frac{9}{4}a^2=24$
$3a^2=24$
$a^2=8$
$a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ \vee\ a=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}.$

G22c $\begin{cases} y=\frac{1}{2}a & ❶ \\ x^2+y^2+6x-8y+16=0 & ❷ \end{cases}$
❶ in ❷ $\Rightarrow x^2+\frac{1}{4}a^2+6x-4a+16=0$
$x^2+6x+\frac{1}{4}a^2-4a+16=0$ (voor raken geldt $D=0$)
$D=6^2-4\cdot1\cdot(\frac{1}{4}a^2-4a+16)$
$=36-a^2+16a-64=-a^2+16a-28=0.$
$a^2-16a+28=0 \Rightarrow (a-2)(a-14)=0 \Rightarrow a=2\ \vee\ a=14.$

G22d $A(2,\ -2)$ op $p_a \Rightarrow 2^2+2a=-2a-a^2 \Rightarrow$
$a^2+4a+4=0 \Rightarrow (a+2)^2=0 \Rightarrow a=-2.$
Dus parabool p_{-2}: $x^2-2x=-2y-4$.
De raaklijn in $A(2,\ -2)$ (met halfsubstitutie) is
$2x-x-2=-y+2-4$ ofwel $x+y=0$.
De normaal in $A(2,\ -2)$ (met halfsubstitutie) is
$x-y=2+2$ ofwel $x-y=4$. (moet pool van P zijn)
De poollijn van $P(x_P,\ y_P)$ t.o.v. de parabool
(met halfsubst.) is $x_Px-x-x_P=-y-y_P-4$
ofwel $(x_P-1)x+y=x_P-y_P-4$.
Dus $\frac{1}{x_P-1}=\frac{-1}{1}=\frac{4}{x_P-y_P-4}$.
Uit $\frac{1}{x_P-1}=-1$ volgt $-x_P+1=1 \Rightarrow x_P=0.$
Uit $-1=\frac{4}{0-y_P-4}$ volgt $y_P+4=4 \Rightarrow y_P=0.$

G23a Een cirkel met middelpunt $M(x_M,\ y_M)$ en straal r
heeft als vergelijking $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$.
Voor raakpunten op de y-as geldt $x=0$ en $y=y_M$.
Dus $(0-x_M)^2+(y_M-y_M)^2=r^2$ ofwel $x_M{}^2=r^2$.
Door $(3,\ -2)$ geeft $(3-x_M)^2+(-2-y_M)^2=r^2$.
Voor r geldt dus $r^2=x_M{}^2$ en $r^2=(3-x_M)^2+(-2-y_M)^2$.
Dus $x_M{}^2=(3-x_M)^2+(-2-y_M)^2 \Rightarrow x_M{}^2=9-6x_M+x_M{}^2+4+4y_M+y_M{}^2 \Rightarrow y_M{}^2+4y_M-6x_M+13=0.$
Dus de middelpunten van alle cirkels die de y-as raken en door het punt $(3,\ -2)$ gaan, liggen op parabool p.

G23b $y^2+4y-6x+13=0$
$(y+2)^2-4-6x+13=0$
$2p=6 \Rightarrow \frac{1}{2}p=\frac{6}{4}=1{,}5$
$(y+2)^2=6x-9$
$(y+2)^2=6(x-1{,}5)$. Top $T(1{,}5;\ -2)$, brandpunt $F(3,\ -2)$, richtlijn: $x=0$ en symmetrieas: $y=-2$.

G23c De poollijn van $P(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ t.o.v. de parabool $y^2+4y-6x+13=0$ is (met halfsubstitutie)
$2\frac{1}{2}y+2y+2\cdot 2\frac{1}{2}-3x-3\cdot 4\frac{1}{2}+13=0$ ofwel $-3x+4\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}=0$ ofwel $6x-9y-9=0$ ofwel $x=1{,}5y+1{,}5$ ❶
Deze poollijn snijden met de parabool geeft de raakpunten.
$6x-9y-9=0$ ofwel $6x=9y+9$ invullen in de (gegeven) vergelijking van de parabool geeft
$y^2+4y-9y-9+13=0 \Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow (y-1)(y-4)=0 \Rightarrow y=1 \ \vee \ y=4.$
$y=1$ in ❶ $\Rightarrow x=1{,}5+1{,}5=3$. Raaklijn in $(3, 1)$ (met halfsubstitutie) is k: $y+2y+2-3x-9+13=0$ ofwel $x-y=2$.
$y=4$ in ❶ $\Rightarrow x=6+1{,}5=7{,}5$. Raaklijn in $(7{,}5;\ 4)$ is l: $4y+2y+8-3x-22{,}5+13=0$ ofwel $x-2y=0{,}5$.

G23d De poollijn van $Q(x_Q, y_Q)$ t.o.v. de parabool $y^2+4y-6x+13=0$ is (met halfsubstitutie)
$y_Qy+2y+2y_Q-3x-3x_Q+13=0$ ofwel $(y_Q+2)y=3x+3x_Q-2y_Q-13$.
Deze poollijn valt samen met $y=-3x+20 \Rightarrow \frac{y_Q+2}{1}=\frac{3}{-3}=\frac{3x_Q-2y_Q-13}{20}$.
Dus $y_Q+2=-1$ en $3x_Q-2y_Q-13=-20 \Rightarrow y_Q=-3$ en $3x_Q+6-13=-20 \Rightarrow x_Q=-\frac{13}{3}$ en $y_Q=-3$.

G24a $y^2=2px$ (met x-as als symmetrieas) heeft top $T(0, 0)$; brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $y=-\frac{1}{2}p$.
$y^2=4x$ (met x-as als symmetrieas) heeft top $T(0, 0)$; brandpunt $F(1, 0)$ en richtlijn $y=-1$. $(2p=4 \Rightarrow p=2 \Rightarrow \frac{1}{2}p=1)$

G24b De poollijn van $C(x_C, y_C)$ t.o.v. de parabool $y^2=4x$ (met halfsubstitutie) is $y_Cy=2x+2x_C$ ofwel $x=\frac{1}{2}y_Cy-x_C$.
Deze lijn valt samen met $x=ay+1 \Rightarrow \frac{1}{2}y_C=a$ en $-x_C=1$. Dus $C(-1, 2a)$.

G24c Deze poollijn snijden met de parabool geeft de raakpunten. Nu $x=ay+1$ ❶ invullen in $y^2=4x$ geeft
$y^2=4ay+4 \Rightarrow y^2-4ay=4 \Rightarrow (y-2a)^2-4a^2=4 \Rightarrow (y-2a)^2=4(a^2+1) \Rightarrow y-2a=\pm 2\sqrt{a^2+1}.$
$y=2a-2\sqrt{a^2+1}$ in ❶ geeft $x=2a^2-2a\sqrt{a^2+1}+1$ en $y=2a+2\sqrt{a^2+1}$ in ❶ geeft $x=2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1$.
Raaklijn in $A(2a^2-2a\sqrt{a^2+1}+1, 2a-2\sqrt{a^2+1})$ (met halfsubstitutie) is
l: $(2a-2\sqrt{a^2+1})y=2x+2(2a^2-2a\sqrt{a^2+1}+1)$ ofwel l: $(a-\sqrt{a^2+1})y=x+2a^2-2a\sqrt{a^2+1}+1 \Rightarrow \text{rc}_l=\frac{1}{a-\sqrt{a^2+1}}$.
Raaklijn in $B(2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1, 2a+2\sqrt{a^2+1})$ (met halfsubstitutie) is
m: $(2a+2\sqrt{a^2+1})y=2x+2(2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1)$ ofwel m: $(a+\sqrt{a^2+1})y=x+2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1 \Rightarrow \text{rc}_m=\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}$.
$\text{rc}_l\cdot\text{rc}_m=\frac{1}{a-\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{a^2-(a^2+1)}=\frac{1}{-1}=-1$. Dus $l \perp m$.

G25a
$6x^2+a^2y^2+12x-8a^2y+10a^2+6=0$
$6\left(x^2+2x\right)+a^2\left(y^2-8y\right)+10a^2+6=0$
$6\left((x+1)^2-1\right)+a^2\left((y-4)^2-16\right)+10a^2+6=0$
$6(x+1)^2-6+a^2(y-4)^2-16a^2+10a^2+6=0$
$6(x+1)^2+a^2(y-4)^2=6a^2$
$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{6}=1$

Het middelpunt van de ellips is $(-1, 4)$.
De toppen zijn $(-a-1, 4)$; $(a-1, 4)$; $(-1, 4-\sqrt{6})$ en $(-1, 4+\sqrt{6})$.
Het punt $A(6, 4)$ is top
als $-a-1=6$ of $a-1=6$, dus als $a=-7$ of $a=7$.

G25b $B(-1, 3)$ is brandpunt (dus op de verticale as).
Dus $a^2<b^2=6$ en $c^2=b^2-a^2=6-a^2 \Rightarrow c=\sqrt{6-a^2}$.
Met brandpunten: $(-1, 4-\sqrt{6-a^2})$ en $(-1, 4+\sqrt{6-a^2})$

$4-\sqrt{6-a^2}=3 \ \vee \ 4+\sqrt{6-a^2}=3$
$\sqrt{6-a^2}=1 \ \vee \ \sqrt{6-a^2}=-1$ (kan niet)
$6-a^2=1 \Rightarrow a^2=5 \Rightarrow a=-\sqrt{5} \ \vee \ a=\sqrt{5}$.

G25c De poollijn van $P(2, 5)$ t.o.v. de ellips (met halfsubstitutie) is
$12x+5a^2y+6x+12-4a^2y-20a^2+10a^2+6=0$ ofwel $18x+a^2y-10a^2+18=0$.
Deze lijn valt samen met $y=-6x+4$ ofwel $6x+y-4=0 \Rightarrow \frac{18}{6}=\frac{a^2}{1}=\frac{-10a^2+18}{-4}$.
Dus $\frac{a^2}{1}=3$ en $\frac{-10a^2+18}{-4}=3 \Rightarrow a^2=3$ en $-10a^2+18=-12 \Rightarrow a^2=3$ en $10a^2=30 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=-\sqrt{3} \ \vee \ a=\sqrt{3}$.

G25d $y=-x-1$ invullen in de (gegeven) vergelijking van de ellips (en dan $D=0$ stellen) geeft
$6x^2+a^2(-x-1)^2+12x-8a^2(-x-1)+10a^2+6=0$
$6x^2+a^2(x^2+2x+1)+12x+8a^2x+8a^2+10a^2+6=0$
$6x^2+a^2x^2+2a^2x+a^2+12x+8a^2x+8a^2+10a^2+6=0 \Rightarrow (a^2+6)x^2+(10a^2+12)x+19a^2+6=0.$
$D=(10a^2+12)^2-4\cdot(a^2+6)\cdot(19a^2+6)=100a^4+240a^2+144-4(19a^4+120a^2+36)$
$=100a^4+240a^2+144-76a^4-480a^2-144=24a^4-240a^2.$
$D=0$ geeft $24a^2(a^2-10)=0 \Rightarrow a^2=0$ (vold. niet, want dan geen term met y^2) $\vee$ $a^2=10 \Rightarrow a=-\sqrt{10} \ \vee \ a=\sqrt{10}$.

G26a De vergelijkingen van de raaklijnen in A en B zijn $y = -\frac{8}{3}x + b$ ofwel $8x + 3y = 3b$.
De raaklijn in $R(x_R, y_R)$ aan de ellips (met halfsubstitutie) is $4x_R \cdot x + y_R \cdot y = 25$.
Deze lijnen vallen samen $\Rightarrow \frac{4x_R}{8} = \frac{y_R}{3} = \frac{25}{3b}$. Uit $\frac{4x_R}{8} = \frac{y_R}{3}$ volgt $8y_R = 12x_R \Rightarrow y_R = \frac{3}{2}x_R$.
$y = \frac{3}{2}x$ ❶ invullen in $4x^2 + y^2 = 25$ geeft
$4x^2 + (\frac{3}{2}x)^2 = 25 \Rightarrow \frac{16+9}{4}x^2 = 25 \Rightarrow \frac{25}{4}x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$.
$x = -2$ in ❶ geeft $y = -3$ met $A(-2, -3)$ en $x = 2$ in ❶ geeft $y = 3$ met $B(2, 3)$.

G26b De poollijn van $P(3\frac{1}{2}, 1)$ t.o.v. de ellips (met halfsubstitutie) is $14x + y = 25$.
De poollijn snijden met de ellips (geeft de raakpunten) $\Rightarrow y = 25 - 14x$ ❶ in vullen in de vergelijking van de ellips.
$4x^2 + (25 - 14x)^2 = 25$
$4x^2 + 625 - 700x + 196x^2 = 25$
$200x^2 - 700x + 600 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$ met $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1$

```
25²            625
2*25*-14      -700
(-14)²         196
```

$x = \frac{7+1}{4} = 2$ in ❶ $\Rightarrow y = 25 - 14 \cdot 2 = 25 - 28 = -3 \vee x = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}$ in ❶ $\Rightarrow y = 25 - 14 \cdot \frac{3}{2} = 25 - 21 = 4$.
De raaklijn in $(2, -3)$ (met halfsubstitutie) is m: $8x - 3y = 25$ en de raaklijn in $(\frac{3}{2}, 4)$ (met halfsubst.) is n: $6x + 4y = 25$.

G26c m: $8x - 3y = 25 \xrightarrow{\text{Tr. }(1,-4)} p$: $8(x-1) - 3(y+4) = 25$ ofwel p: $8x - 8 - 3y - 12 = 25$ ofwel p: $8x - 3y = 45$.
n: $6x + 4y = 25 \xrightarrow{\text{Tr. }(1,-4)} q$: $6(x-1) + 4(y+4) = 25$ ofwel q: $6x - 6 + 4y + 16 = 25$ ofwel q: $6x + 4y = 15$.

G27a $y = -\frac{2}{3}x + b$ ❶ invullen in $4x^2 + 9y^2 = 72$ geeft de snijpunten voor $D > 0$.

```
-4*8*9        -288
-4*8*-72      2304
```

$4x^2 + 9(-\frac{2}{3}x + b)^2 = 4x^2 + 9(\frac{4}{9}x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot b + b^2) = 4x^2 + 4x^2 - 12bx + 9b^2 = 72$
$8x^2 - 12bx + 9b^2 - 72 = 0$ met $D = (-12b)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (9b^2 - 72) = 144b^2 - 288b^2 + 2304 = -144b^2 + 2304$.
$D > 0 \Rightarrow -144b^2 + 2304 > 0 \Rightarrow 144b^2 - 2304 < 0 \Rightarrow b^2 < 16 \Rightarrow |b| < 4 \Leftrightarrow -4 < b < 4$.

```
2304/144        16
```

G27b $x_A = \frac{12b - \sqrt{D}}{16} \vee x_B = \frac{12b + \sqrt{D}}{16} \Rightarrow x_M = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{12b - \sqrt{D}}{16} + \frac{12b + \sqrt{D}}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{24b}{16} = \frac{12b}{16} = \frac{3}{4}b$.
M op $y = -\frac{2}{3}x + b \Rightarrow y_M = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}b + b = -\frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}b$. Dus $M(\frac{3}{4}b, \frac{1}{2}b)$.

G27c $M(\frac{3}{4}b, \frac{1}{2}b) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus M ligt op de lijn $3x + 2y = 0$ ofwel $y = \frac{2}{3}x$.
Omdat $-4 < b < 4$ liggen de punten M op het lijnstuk tussen de punten $(-3, -2)$ en $(3, 2)$.

G28a c: $(x+4)^2 + y^2 = 36$ is de cirkel met middelpunt $M(-4, 0)$ en straal 6.
$d(A, M) = \sqrt{(4 - -4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8 > 6$, dus A ligt buiten de cirkel.
De conflictlijn is een hyperbool met brandtpunten $M(-4, 0)$ en $A(4, 0)$ ($\Rightarrow c = 4$ en de brandpunten op een horizontale as).
Dus de oorsprong is het middelpunt van de gezochte hyperbool $\Rightarrow$ de vergelijking is van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
$T(3, 0)$ is een top van de hyperbool, want $d(T, A) = d(T, c) = 1 \Rightarrow a = 3$ en $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$.
Dus de formule van de conflictlijn is $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

G28b $d(O, M) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 < 6$, dus O ligt binnen de cirkel.
De conflictlijn is een ellips met brandtpunten $M(-4, 0)$ en $O(0, 0)$ ($\Rightarrow c = 2$ en de brandpunten op een horizontale as).
Dus $(-2, 0)$ is het middelpunt van de gezochte ellips $\Rightarrow$ de vergelijking is van de vorm $\frac{(x+2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
$T(1, 0)$ is een top van de ellips, want $d(T, O) = d(T, c) = 1 \Rightarrow a = 3$ en $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.
Dus de formule van de conflictlijn is $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

G29a $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = -\frac{53}{pq}$ ofwel $qx^2 - py^2 = -53$.
$A(3, -4)$ ligt op de hyperbool $\Rightarrow q \cdot 9 - p \cdot 16 = -53$ ofwel $9q - 16p = -53$.
$B(-8, 7)$ ligt op de hyperbool $\Rightarrow q \cdot 64 - p \cdot 49 = -53$ ofwel $64q - 49p = -53$.

$$\begin{cases} 9q - 16p = -53 \text{ ❶} & \times 64 \\ 64q - 49p = -53 & \times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 576q - 1024p = -3392 \\ 576q - 441p = -477 \end{cases} -$$

$$-583p = -2915 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow 9q - 16 \cdot 5 = -53 \Rightarrow 9q = 27 \Rightarrow q = 3.$$

```
9*64           576
-16*64       -1024
-53*64       -3392
```

```
64*9           576
-49*9         -441
-53*9         -477
```

```
-1024+441     -583
-3392+477    -2915
```

```
-2915/-583       5
-53+16*5        27
Ans/9            3
```

G29b $p=5$ en $q=3 \Rightarrow$ hyperbool $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=-\frac{53}{15}$ ofwel $3x^2-5y^2=-53$.
De raaklijn in $A(3,\,-4)$ (met halfsubstitutie) is $9x+20y=-53$.
Dus de normaal in $A(3,\,-4)$ is k: $20x-9y=20\cdot 3-9\cdot -4$ ofwel k: $20x-9y=96$.

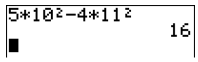
G29c De poollijn van $P(x_P,\,y_P)$ t.o.v. de hyperbool $3x^2-5y^2=-53$ is (met halfsubstitutie) $3x_P\cdot x-5y_P\cdot y=-53$.
Deze poollijn moet samenvallen met $2x-y=2 \Rightarrow \frac{3x_P}{2}=\frac{-5y_P}{-1}=\frac{-53}{2}$.
Uit $\frac{3x_P}{2}=\frac{-53}{2}$ volgt $3x_P=-53 \Rightarrow x_P=-\frac{53}{3}$ en uit $\frac{-5y_P}{-1}=\frac{-53}{2}$ volgt $-10y_P=53 \Rightarrow y_P=-\frac{53}{10}$. Dus $P(-\frac{53}{3},\,-\frac{53}{10})$.

G30a De poollijn van $(0,\,-4)$ t.o.v. de hyperbool $5x^2-4y^2=16$ is (met halfsubstitutie) $16y=16$ ofwel $y=1$.
Deze poollijn snijden met de hyperbool geeft de gezochte raakpunten, dus $y=1$ invullen in $5x^2-4y^2=16$.
$5x^2-4=16 \Rightarrow 5x^2=20 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Dus $A(-2,1)$ en $B(2,1)$.

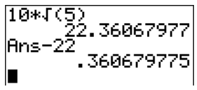
G30b De vergelijkingen van de raaklijnen in de gezochte punten zijn $y=\frac{5}{4}x+b$ ofwel $5x-4y=-4b$.
De raaklijn in $R(x_R,\,y_R)$ aan de hyperbool (met halfsubstitutie) is $5x_R\cdot x-4y_R\cdot y=16$.
Deze lijnen vallen samen $\Rightarrow \frac{5x_R}{5}=\frac{-4y_R}{-4}=\frac{16}{-4b} \Rightarrow x_R=y_R$.
$y=x$ invullen in h geeft $5x^2-4x^2=16 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=-4 \;\vee\; x=4$. De snijpunten zijn $(-4,\,-4)$ en $(4,\,4)$.

G30c De poollijn van $P(x_P,\,y_P)$ t.o.v. de hyperbool $5x^2-4y^2=16$ is (met halfsubstitutie) $5x_P\cdot x-4y_P\cdot y=16$.
Deze poollijn moet samenvallen met $x-4y=12 \Rightarrow \frac{5x_P}{1}=\frac{-4y_P}{-4}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$.
Uit $\frac{5x_P}{1}=\frac{4}{3}$ volgt $x_P=\frac{4}{15}$ en uit $\frac{-4y_P}{-4}=\frac{4}{3}$ volgt $y_P=\frac{4}{3}$. Dus $P(\frac{4}{15},\,\frac{4}{3})$.

G30d Het punt $R(10,11)$ geeft met halfsubstitutie in $5x^2-4y^2=16$ de lijn p: $50x-44y=16$.



Deze lijn is raaklijn in het punt $R(10,11)$ als $R(10,11)$ op de hyperbool ligt.
$x=10$ en $y=11$ invullen in $5x^2-4=16$ geeft $\Rightarrow 5\cdot 10^2-4\cdot 11^2=16$, dit klopt dus $R(10,11)$ is het raakpunt.
$5x^2-4y^2=16$ ofwel $\frac{5x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ (met als middelpunt de oorspong) $\Rightarrow a^2=\frac{16}{5}$ en $b^2=4 \Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{5}}$ en $b=2$.
De asymptoten zijn q: $y=-\frac{b}{a}x$ en r: $y=\frac{b}{a}x \Rightarrow q$: $bx+ay=0$ en r: $bx-ay=0$.
Dus q: $2x+\frac{4}{\sqrt{5}}y=0$ en r: $2x-\frac{4}{\sqrt{5}}y=0$ ofwel q: $\sqrt{5}\cdot x+2y=0$ en r: $\sqrt{5}\cdot x-2y=0$.
$d(R,q)=\frac{|\sqrt{5}\cdot 10+2\cdot 11|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}}=\frac{10\sqrt{5}+22}{\sqrt{9}}=\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{22}{3}$ en $d(R,r)=\frac{|\sqrt{5}\cdot 10-2\cdot 11|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}}=\frac{10\sqrt{5}-22}{\sqrt{9}}=\frac{10}{3}\sqrt{5}-\frac{22}{3}$.



G31a Cirkel $\Rightarrow a=2a-1 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$.
$a=1 \Rightarrow\;\; x^2+y^2+4x+2by+1=0$
$(x+2)^2-4+(y+b)^2-b^2+1=0$
$(x+2)^2+(y+b)^2=b^2+3$ een cirkel als $b^2+3\ge 0 \Rightarrow b^2\ge -3$ en dat is voor elke b. Dus $a=-1$.

G31b Parabool $\Rightarrow a=0 \;\vee\; 2a-1=0 \Rightarrow a=0 \;\vee\; 2a=1 \Rightarrow a=0 \;\vee\; a=\frac{1}{2}$.
$a=0 \Rightarrow\;\; -y^2+2by=0$
$-y(y+2b)=0$
$y=0 \;\vee\; y=-2b$ dit zijn twee horizontale lijnen, dus $a=0$ voldoet niet.
$a=\frac{1}{2} \Rightarrow\;\; \frac{1}{2}x^2+2x+2by+\frac{1}{4}=0$
$x^2+4x+4by+\frac{1}{2}=0$
$(x+2)^2-4+4by+\frac{1}{2}=0$
$(x+2)^2=-4by+\frac{7}{2}$ dit is een parabool als $b\ne 0$. Dus een parabool als $a=\frac{1}{2} \;\wedge\; b\ne 0$.

G31c Hyperbool $\Rightarrow a\ne 0$ en $2a-1\ne 0$ zijn tegengesteld van teken, dus $a>0 \;\wedge\; 2a-1<0$ of $a<0 \;\wedge\; 2a-1>0$.
$a>0 \;\wedge\; 2a-1<0 \Rightarrow a>0 \;\wedge\; 2a<1 \Rightarrow a>0 \;\wedge\; a<\frac{1}{2} \Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$.
$a<0 \;\wedge\; 2a-1>0 \Rightarrow a<0 \;\wedge\; 2a>1$ heeft geen oplossingen.
Dus een hyperbool als $0<a<\frac{1}{2}$.